Análisis convexo, cálculo diferencial y aplicaciones

Juan PEYPOUQUET
Universidad Técnica Federico Santa María

V-Escuela 2016

Valparaíso, 11 al 21 de octubre

CONVEXIDAD Y CONTINUIDAD

Caracterización de la continuidad

Teorema

Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa y fijemos $x_0 \in X$. Son equivalentes:

1. *f está acotada superiormente en una vecindad de x_0;*
2. *f es Lipschitz-continua en una vecindad de x_0;*
3. *f es continua en x_0; y*
4. *$(x_0, \lambda) \in int(epi(f))$ para cada $\lambda > f(x_0)$.*

Condiciones suficientes

Teorema

Sea X un espacio normado y sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa. Cualquiera de las siguientes condiciones es suficiente para que f sea continua en $int(dom(f))$:

1. *f es continua el algún punto;*
2. *$int([f \leq \gamma]) \neq \emptyset$ para algún $\gamma \in \mathbb{R}$;*
3. *X tiene dimensión finita; o*
4. *X es de Banach y f es inferiormente semicontinua.*

Condiciones suficientes

Teorema

Sea X un espacio normado y sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa. Cualquiera de las siguientes condiciones es suficiente para que f sea continua en $int(dom(f))$:

1. *f es continua el algún punto;*
2. *$int([f \leq \gamma]) \neq \emptyset$ para algún $\gamma \in \mathbb{R}$;*
3. *X tiene dimensión finita; o*
4. *X es de Banach y f es inferiormente semicontinua.*

Condiciones suficientes

Teorema

Sea X un espacio normado y sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa. Cualquiera de las siguientes condiciones es suficiente para que f sea continua en $int(dom(f))$:

1. *f es continua el algún punto;*
2. *$int([f \leq \gamma]) \neq \emptyset$ para algún $\gamma \in \mathbb{R}$;*
3. *X tiene dimensión finita; o*
4. *X es de Banach y f es inferiormente semicontinua.*

Condiciones suficientes

Teorema

Sea X un espacio normado y sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa. Cualquiera de las siguientes condiciones es suficiente para que f sea continua en $int(dom(f))$:

1. *f es continua el algún punto;*
2. *$int([f \leq \gamma]) \neq \emptyset$ para algún $\gamma \in \mathbb{R}$;*
3. *X tiene dimensión finita; o*
4. *X es de Banach y f es inferiormente semicontinua.*

Condiciones suficientes

Teorema

Sea X un espacio normado y sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa. Cualquiera de las siguientes condiciones es suficiente para que f sea continua en $int(dom(f))$:

1. *f es continua el algún punto;*
2. *$int([f \leq \gamma]) \neq \emptyset$ para algún $\gamma \in \mathbb{R}$;*
3. *X tiene dimensión finita; o*
4. *X es de Banach y f es inferiormente semicontinua.*

CÁLCULO SUBDIFERENCIAL

Subgradientes y subdiferencial

Recordemos que si $f : X \to \mathbb{R}$ es convexa y diferenciable, entonces

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

para cada $x, y \in X$.

Esto quiere decir que el hiperplano tangente al gráfico de f en el punto $(x, f(x))$ está por debajo de dicho gráfico.

Subgradientes y subdiferencial

Recordemos que si $f : X \to \mathbb{R}$ es convexa y diferenciable, entonces

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

para cada $x, y \in X$.

Esto quiere decir que el hiperplano tangente al gráfico de f en el punto $(x, f(x))$ está por debajo de dicho gráfico.

Subgradientes y subdiferencial

Con esta idea en mente, diremos que $x^* \in X^*$ es un subgradiente de f en x si

$$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x \rangle$$

para cada $x, y \in X$.

El conjunto de todos los subgradientes de f en x es el subdiferencial de f en x y se denota por $\partial f(x)$. También escribiremos

$$\mathrm{dom}(\partial f) = \{x \in X : \partial f(x) \neq \emptyset\}.$$

Subgradientes y subdiferencial

Con esta idea en mente, diremos que $x^* \in X^*$ es un subgradiente de f en x si

$$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x \rangle$$

para cada $x, y \in X$.

El conjunto de todos los subgradientes de f en x es el subdiferencial de f en x y se denota por $\partial f(x)$. También escribiremos

$$\operatorname{dom}(\partial f) = \{x \in X : \partial f(x) \neq \emptyset\}.$$

Subgradientes y subdiferencial

Con esta idea en mente, diremos que $x^* \in X^*$ es un subgradiente de f en x si

$$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x \rangle$$

para cada $x, y \in X$.

El conjunto de todos los subgradientes de f en x es el subdiferencial de f en x y se denota por $\partial f(x)$. También escribiremos

$$\operatorname{dom}(\partial f) = \{x \in X : \partial f(x) \neq \emptyset\}.$$

Algunos ejemplos en $\mathbb{R}$

Calculemos el subdiferencial de las siguientes funciones en $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = |x|$.
2. $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ +\infty & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$
3. $h(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad x < 0 \\ -\sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$

Observe lo que sucede con los dominios.

Algunos ejemplos en $\mathbb{R}$

Calculemos el subdiferencial de las siguientes funciones en $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = |x|$.
2. $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ +\infty & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$
3. $h(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad x < 0 \\ -\sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$

Observe lo que sucede con los dominios.

Algunos ejemplos en $\mathbb{R}$

Calculemos el subdiferencial de las siguientes funciones en $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = |x|$.
2. $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ +\infty & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$
3. $h(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad x < 0 \\ -\sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$

Observe lo que sucede con los dominios.

Algunos ejemplos en $\mathbb{R}$

Calculemos el subdiferencial de las siguientes funciones en $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = |x|$.
2. $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ +\infty & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$
3. $h(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad x < 0 \\ -\sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$

Observe lo que sucede con los dominios.

Algunos ejemplos en $\mathbb{R}$

Calculemos el subdiferencial de las siguientes funciones en $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = |x|$.
2. $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ +\infty & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$
3. $h(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad x < 0 \\ -\sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$

Observe lo que sucede con los dominios.

Más ejemplos

Calculemos el subdiferencial de las siguientes funciones en un espacio de Hilbert:

1. $f(x) = \|x\|$. ¿Qué podemos decir si X es de Banach?
2. La función indicatriz de un conjunto convexo, cerrado y no vacío $C \subset X$, que está dada por:

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

El conjunto $N_C(x) := \partial \delta_C(x)$ es el cono normal a C en x.

Más ejemplos

Calculemos el subdiferencial de las siguientes funciones en un espacio de Hilbert:

1. $f(x) = \|x\|$. ¿Qué podemos decir si X es de Banach?
2. La función indicatriz de un conjunto convexo, cerrado y no vacío $C \subset X$, que está dada por:

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

El conjunto $N_C(x) := \partial\delta_C(x)$ es el cono normal a C en x.

Más ejemplos

Calculemos el subdiferencial de las siguientes funciones en un espacio de Hilbert:

1. $f(x) = \|x\|$. ¿Qué podemos decir si X es de Banach?
2. La función indicatriz de un conjunto convexo, cerrado y no vacío $C \subset X$, que está dada por:

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

El conjunto $N_C(x) := \partial\delta_C(x)$ es el cono normal a C en x.

Más ejemplos

Calculemos el subdiferencial de las siguientes funciones en un espacio de Hilbert:

1. $f(x) = \|x\|$. ¿Qué podemos decir si X es de Banach?
2. La función indicatriz de un conjunto convexo, cerrado y no vacío $C \subset X$, que está dada por:

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

El conjunto $N_C(x) := \partial\delta_C(x)$ es el cono normal a C en x.

Más ejemplos

Calculemos el subdiferencial de las siguientes funciones en un espacio de Hilbert:

1. $f(x) = \|x\|$. ¿Qué podemos decir si X es de Banach?
2. La función indicatriz de un conjunto convexo, cerrado y no vacío $C \subset X$, que está dada por:

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

El conjunto $N_C(x) := \partial\delta_C(x)$ es el cono normal a C en x.

Principales propiedades

Proposición

Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa.

1. *Si f es (G) diferenciable en x_0, entonces $x_0 \in dom(\partial f)$ y*
$$\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}.$$
2. *Para cada $x \in dom(\partial f)$, $\partial f(x)$ es convexo y cerrado.*
3. *Para cada $x^* \in \partial f(x)$ e $y^* \in \partial f(y)$, se tiene*
$$\langle y^* - x^*, y - x \rangle \geq 0.$$

Principales propiedades

Proposición

Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa.

1. *Si f es (G) diferenciable en x_0, entonces $x_0 \in dom(\partial f)$ y*

$$\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}.$$

2. *Para cada $x \in dom(\partial f)$, $\partial f(x)$ es convexo y cerrado.*
3. *Para cada $x^* \in \partial f(x)$ e $y^* \in \partial f(y)$, se tiene*

$$\langle y^* - x^*, y - x\rangle \geq 0.$$

Principales propiedades

Proposición

Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa.

1. *Si f es (G) diferenciable en x_0, entonces $x_0 \in dom(\partial f)$ y*

$$\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}.$$

2. *Para cada $x \in dom(\partial f)$, $\partial f(x)$ es convexo y cerrado.*
3. *Para cada $x^* \in \partial f(x)$ e $y^* \in \partial f(y)$, se tiene*

$$\langle y^* - x^*, y - x\rangle \geq 0.$$

Principales propiedades

Proposición

Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa.

1. *Si f es (G) diferenciable en x_0, entonces $x_0 \in dom(\partial f)$ y*
$$\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}.$$
2. *Para cada $x \in dom(\partial f)$, $\partial f(x)$ es convexo y cerrado.*
3. *Para cada $x^* \in \partial f(x)$ e $y^* \in \partial f(y)$, se tiene*
$$\langle y^* - x^*, y - x \rangle \geq 0.$$

Regla de Fermat

Teorema

$$\bar{x} \in S \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \in \partial f(\bar{x}).$$

Demostración

$$\begin{aligned} 0 \in \partial f(\bar{x}) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(y) \geq f(\bar{x}) + \langle 0, y - \bar{x} \rangle \quad \textit{para todo } y \in X \\ &\Longleftrightarrow \quad f(y) \geq f(\bar{x}) \quad \textit{para todo } y \in X \\ &\Longleftrightarrow \quad \bar{x} \in S. \end{aligned}$$

Regla de Fermat

Teorema

$$\bar{x} \in S \quad \iff \quad 0 \in \partial f(\bar{x}).$$

Demostración

$$\begin{aligned} 0 \in \partial f(\bar{x}) \quad &\iff \quad f(y) \geq f(\bar{x}) + \langle 0, y - \bar{x} \rangle \quad \textit{para todo } y \in X \\ &\iff \quad f(y) \geq f(\bar{x}) \quad \textit{para todo } y \in X \\ &\iff \quad \bar{x} \in S. \end{aligned}$$

Continuidad y subdiferenciabilidad

Proposición

Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa. Si f es continua en x_0, entonces $\partial f(x_0)$ es acotado y no vacío.

REGLAS DE CÁLCULO

Suma de funciones

Ejemplo

Consideremos las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ +\infty & si \quad x > 0 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} +\infty & si \quad x < 0 \\ -\sqrt{x} & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Comprobemos que

$$\partial f(x) + \partial g(x) \subsetneq \partial(f+g)(x).$$

Suma de funciones

Ejemplo

Consideremos las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ +\infty & si \quad x > 0 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} +\infty & si \quad x < 0 \\ -\sqrt{x} & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Comprobemos que

$$\partial f(x) + \partial g(x) \subsetneq \partial(f+g)(x).$$

Teorema de Moreau-Rockafellar

Teorema

Sean $f, g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ funciones propias, convexas e inferiormente semicontinuas. Para cada $x \in X$, se tiene

$$\partial f(x) + \partial g(x) \subseteq \partial(f+g)(x).$$

La igualdad se tiene para todo $x \in X$ si f es continua en algún $x_0 \in dom(g)$.

Teorema de Moreau-Rockafellar

Teorema

Sean $f, g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *funciones propias, convexas e inferiormente semicontinuas. Para cada* $x \in X$*, se tiene*

$$\partial f(x) + \partial g(x) \subseteq \partial(f+g)(x).$$

La igualdad se tiene para todo $x \in X$ *si* f *es continua en algún* $x_0 \in dom(g)$*.*

Regla de la cadena

Teorema

Sea $A : X \to Y$ una función lineal y continua, y sea $f : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia, convexa e inferiormente semicontinua. Para cada $x \in X$, se cumple que

$$A^*\partial f(Ax) \subseteq \partial(f \circ A)(x).$$

La igualdad se tiene para todo $x \in X$ si f es continua en algún $y_0 \in A(X)$.

Regla de la cadena

Teorema

Sea $A : X \to Y$ una función lineal y continua, y sea $f : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia, convexa e inferiormente semicontinua. Para cada $x \in X$, se cumple que

$$A^* \partial f(Ax) \subseteq \partial (f \circ A)(x).$$

La igualdad se tiene para todo $x \in X$ si f es continua en algún $y_0 \in A(X)$.

Búsqueda de Minimizadores

Sucesiones minimizantes convergentes

Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia e inferiormente semicontinua, y sea (x_n) una sucesión minimizante para f. Es decir, tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf(f).$$

Tenemos lo siguiente:

- Si x_n converge a $\bar{x}$, entonces $\bar{x} \in S$.
- Si f es convexa y x_n converge débilmente a $\bar{x}$, entonces $\bar{x} \in S$.

Sucesiones minimizantes convergentes

Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia e inferiormente semicontinua, y sea (x_n) una sucesión minimizante para f. Es decir, tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf(f).$$

Tenemos lo siguiente:

- Si x_n converge a $\bar{x}$, entonces $\bar{x} \in S$.
- Si f es convexa y x_n converge débilmente a $\bar{x}$, entonces $\bar{x} \in S$.

Sucesiones minimizantes convergentes

Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia e inferiormente semicontinua, y sea (x_n) una sucesión minimizante para f. Es decir, tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf(f).$$

Tenemos lo siguiente:

- Si x_n converge a $\bar{x}$, entonces $\bar{x} \in S$.
- Si f es convexa y x_n converge débilmente a $\bar{x}$, entonces $\bar{x} \in S$.

Sucesiones minimizantes convergentes

Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia e inferiormente semicontinua, y sea (x_n) una sucesión minimizante para f. Es decir, tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf(f).$$

Tenemos lo siguiente:

- Si x_n converge a $\bar{x}$, entonces $\bar{x} \in S$.
- Si f es convexa y x_n converge débilmente a $\bar{x}$, entonces $\bar{x} \in S$.

Una condición suficiente para la convergencia

Teorema

Sea X un espacio de Hilbert y sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia, convexa e inferiormente semicontinua con $S \neq \emptyset$. Supongamos que (x_n) es una sucesión minimizante para f tal que para cada $s \in S$ existe

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - s\|.$$

Entonces, x_n converge débilmente a algún $\bar{x} \in S$.

Estrategia para buscar minimizadores

Para aproximar un minimizador de f basta encontrar una sucesión (x_n) tal que

1. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf(f)$; y
2. $\lim_{n\to\infty} \|x_n - s\|$ existe para cada $s \in S$.

En la última parte del curso, estudiaremos un método para ello.

Estrategia para buscar minimizadores

Para aproximar un minimizador de f basta encontrar una sucesión (x_n) tal que

1. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf(f)$; y
2. $\lim_{n\to\infty} \|x_n - s\|$ existe para cada $s \in S$.

En la última parte del curso, estudiaremos un método para ello.