Análisis convexo, cálculo diferencial y aplicaciones

Juan PEYPOUQUET
Universidad Técnica Federico Santa María

V-Escuela 2016

Valparaíso, 11 al 21 de octubre

FUNCIONES CONVEXAS

Funciones convexas

Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en un espacio vectorial X es convexa si para cada $x, y \in X$ y cada $\lambda \in (0,1)$ se cumple que

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Proposición

Son equivalentes:

1. *f es convexa; y*
2. *$\mathrm{epi}(f)$ es un conjunto convexo.*

Además, si f es convexa, el conjunto $[f \leq \gamma]$ es convexo para todo $\gamma \in \mathbb{R}$.

Funciones convexas

Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en un espacio vectorial X es convexa si para cada $x, y \in X$ y cada $\lambda \in (0,1)$ se cumple que

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Proposición

Son equivalentes:

1. *f es convexa; y*
2. *epi(f) es un conjunto convexo.*

Además, si f es convexa, el conjunto $[f \leq \gamma]$ es convexo para todo $\gamma \in \mathbb{R}$.

Funciones cuadráticas

Sea $B : X \times X \to \mathbb{R}$ una función bilineal y definamos

$$f(x) = B(x, x).$$

Entonces, para cada $x, y \in X$ y $\lambda \in (0, 1)$, tenemos

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda(1-\lambda)B(x-y, x-y).$$

En consecuencia,

- f es convexa si B es semidefinida positiva;
- f es estrictamente convexa si B es definida positiva; y
- f es fuertemente convexa si B es uniformemente elíptica.

Preservación de la convexidad

Proposición

- *Si* $f, g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *son convexas y* $\alpha \geq 0$*, entonces* $\alpha f + g$ *es convexa.*
- *Sean* $A : X \to Y$ *una función afín,* $f : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función convexa y* $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función convexa y creciente. Entonces* $\theta \circ f \circ A : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *es convexa.*
- *Si* $(f_i)_{i \in I}$ *es una familia de funciones convexas, entonces* $\sup_{i \in I} f_i$ *es convexa.*

Preservación de la convexidad

Proposición

- *Si* $f, g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *son convexas y* $\alpha \geq 0$, *entonces* $\alpha f + g$ *es convexa.*
- *Sean* $A : X \to Y$ *una función afín,* $f : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función convexa y* $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función convexa y creciente. Entonces* $\theta \circ f \circ A : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *es convexa.*
- *Si* $(f_i)_{i \in I}$ *es una familia de funciones convexas, entonces* $\sup_{i \in I} f_i$ *es convexa.*

Preservación de la convexidad

Proposición

- *Si* $f, g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *son convexas y* $\alpha \geq 0$*, entonces* $\alpha f + g$ *es convexa.*
- *Sean* $A : X \to Y$ *una función afín,* $f : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función convexa y* $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función convexa y creciente. Entonces* $\theta \circ f \circ A : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *es convexa.*
- *Si* $(f_i)_{i \in I}$ *es una familia de funciones convexas, entonces* $\sup_{i \in I} f_i$ *es convexa.*

Un resultado de representación

Teorema

Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia. Son equivalentes:

1. *F es convexa e inferiormente semicontinua; y*
2. *Existe una familia $(f_i)_{i \in I}$ de funciones afines y continuas con la propiedad de que*

$$f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$$

para todo $x \in X$.

CONVEXIDAD Y FUNCIONES DIFERENCIABLES

Caracterización de la convexidad

Proposición

Sea $A \subset X$ un abierto convexo y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función (G) diferenciable. Son equivalentes:

1. *f es convexa;*
2. *$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$ para cada $x, y \in A$;*
3. *$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$ para cada $x, y \in A$.*

Si, además, f es dos veces (G) diferenciable, entonces las condiciones anteriores son equivalentes a:

4. *$\langle \nabla^2 f(x) d, d \rangle \geq 0$ para cada $x \in A$ y cada $d \in X$.*

Más allá de la monotonía

Teorema (Lema de descenso / Teorema de Baillon-Haddad)

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función convexa y (G) diferenciable. Son equivalentes:

1. *∇f es Lipschitz-continuo con constante L;*
2. *Para cada $x, y \in X$, se tiene*
$$f(y) \leq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{L}{2}\|x - y\|^2;$$
3. *Para cada $x, y \in X$, se tiene*
$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq \frac{1}{L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_*^2.$$

Convexidad y Continuidad

Caracterización de la continuidad

Teorema

Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función convexa y fijemos* $x_0 \in X$. *Son equivalentes:*

1. f *está acotada superiormente en una vecindad de* x_0;
2. f *es Lipschitz-continua en una vecindad de* x_0;
3. f *es continua en* x_0; *y*
4. $(x_0, \lambda) \in int(epi(f))$ *para cada* $\lambda > f(x_0)$.

Condiciones suficientes

Teorema

Sea X un espacio normado y sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa. Cualquiera de las siguientes condiciones es suficiente para que f sea continua en $int(dom(f))$:

1. *f es continua el algún punto;*
2. *$int([f \leq \gamma]) \neq \emptyset$ para algún $\gamma \in \mathbb{R}$;*
3. *X tiene dimensión finita; o*
4. *X es de Banach y f es inferiormente semicontinua.*

Condiciones suficientes

Teorema

Sea X un espacio normado y sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa. Cualquiera de las siguientes condiciones es suficiente para que f sea continua en $int(dom(f))$:

1. *f es continua el algún punto;*
2. *$int([f \leq \gamma]) \neq \emptyset$ para algún $\gamma \in \mathbb{R}$;*
3. *X tiene dimensión finita; o*
4. *X es de Banach y f es inferiormente semicontinua.*

Condiciones suficientes

Teorema

Sea X un espacio normado y sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa. Cualquiera de las siguientes condiciones es suficiente para que f sea continua en $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$:

1. *f es continua el algún punto;*
2. *$\mathrm{int}([f \leq \gamma]) \neq \emptyset$ para algún $\gamma \in \mathbb{R}$;*
3. *X tiene dimensión finita; o*
4. *X es de Banach y f es inferiormente semicontinua.*

Condiciones suficientes

Teorema

Sea X un espacio normado y sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa. Cualquiera de las siguientes condiciones es suficiente para que f sea continua en $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$:

1. *f es continua el algún punto;*
2. *$\mathrm{int}([f \leq \gamma]) \neq \emptyset$ para algún $\gamma \in \mathbb{R}$;*
3. *X tiene dimensión finita; o*
4. *X es de Banach y f es inferiormente semicontinua.*

Condiciones suficientes

Teorema

Sea X un espacio normado y sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa. Cualquiera de las siguientes condiciones es suficiente para que f sea continua en $int(dom(f))$:

1. *f es continua el algún punto;*
2. *$int([f \leq \gamma]) \neq \emptyset$ para algún $\gamma \in \mathbb{R}$;*
3. *X tiene dimensión finita; o*
4. *X es de Banach y f es inferiormente semicontinua.*