Análisis convexo, cálculo diferencial y aplicaciones

Juan PEYPOUQUET
Universidad Técnica Federico Santa María

V-Escuela 2016

Valparaíso, 11 al 21 de octubre

Existencia de Soluciones

Semicontinuidad inferior

Una función propia $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en un espacio de Hausdorff X es inferiormente semicontinua si para cada $x \in \mathrm{dom}(f)$ y cada $\varepsilon > 0$ existe una vecindad V de x tal que

$$f(y) \geq f(x) - \varepsilon$$

para todo $y \in V$.

Proposición

Son equivalentes:

1. *f es inferiormente semicontinua;*
2. *$\mathrm{epi}(f)$ es cerrado en $X \times \mathbb{R}$; y*
3. *$[f \leq \gamma]$ es cerrado en X.*

Semicontinuidad inferior

Una función propia $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en un espacio de Hausdorff X es inferiormente semicontinua si para cada $x \in \mathrm{dom}(f)$ y cada $\varepsilon > 0$ existe una vecindad V de x tal que

$$f(y) \geq f(x) - \varepsilon$$

para todo $y \in V$.

Proposición

Son equivalentes:

1. f *es inferiormente semicontinua;*
2. $\mathrm{epi}(f)$ *es cerrado en* $X \times \mathbb{R}$*; y*
3. $[f \leq \gamma]$ *es cerrado en* X.

Semicontinuidad inferior

Una función propia $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en un espacio de Hausdorff X es inferiormente semicontinua si para cada $x \in \mathrm{dom}(f)$ y cada $\varepsilon > 0$ existe una vecindad V de x tal que

$$f(y) \geq f(x) - \varepsilon$$

para todo $y \in V$.

Proposición

Son equivalentes:

1. *f es inferiormente semicontinua;*
2. *$\mathrm{epi}(f)$ es cerrado en $X \times \mathbb{R}$; y*
3. *$[f \leq \gamma]$ es cerrado en X.*

Inf-compacidad

Sea X un espacio de Hausdorff. Una función

$$f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

es inf-compacta si el conjunto

$$[f \leq \gamma]$$

es relativamente compacto para algún $\gamma > \inf(f)$.

¿Qué ocurre si X es un espacio de Banach reflexivo dotado de la topología débil?

Inf-compacidad

Sea X un espacio de Hausdorff. Una función

$$f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

es inf-compacta si el conjunto

$$[f \leq \gamma]$$

es relativamente compacto para algún $\gamma > \inf(f)$.

¿Qué ocurre si X es un espacio de Banach reflexivo dotado de la topología débil?

Weierstrass-Hilbert-Tonelli, versión topológica

Teorema

Sea X un espacio de Hausdorff y sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia, inferiormente semicontinua e inf-compacta. Entonces $\inf(f) > -\infty$. Además, S es compacto y no vacío.

Nociones secuenciales

Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en un espacio de Hausdorff X es

- secuencialmente inferiormente semicontinua si

$$f(x) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n)$$

  para toda sucesión (x_n) que converja a x.

¿Cómo se compara con lo anterior si el espacio es normado?

¿Qué dice esto de los límites de sucesiones minimizantes?

Nociones secuenciales

Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en un espacio de Hausdorff X es

- secuencialmente inferiormente semicontinua si

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

  para toda sucesión (x_n) que converja a x.

¿Cómo se compara con lo anterior si el espacio es normado?

¿Qué dice esto de los límites de sucesiones minimizantes?

Nociones secuenciales

Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en un espacio de Hausdorff X es

- secuencialmente inferiormente semicontinua si

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

para toda sucesión (x_n) que converja a x.

¿Cómo se compara con lo anterior si el espacio es normado?

¿Qué dice esto de los límites de sucesiones minimizantes?

Nociones secuenciales

Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en un espacio de Hausdorff X es

- secuencialmente inf-compacta si existe $\gamma > \inf(f)$ tal que toda sucesión en
$$[f \leq \gamma]$$
tiene una subsucesión convergente.

¿Qué ocurre si X es un espacio de Banach reflexivo dotado de la topología débil?

Nociones secuenciales

Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en un espacio de Hausdorff X es

- secuencialmente inf-compacta si existe $\gamma > \inf(f)$ tal que toda sucesión en
$$[f \leq \gamma]$$
tiene una subsucesión convergente.

¿Qué ocurre si X es un espacio de Banach reflexivo dotado de la topología débil?

Weierstrass-Hilbert-Tonelli, versión secuencial

Teorema

Sea X un espacio de Hausdorff y sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia, secuencialmente inferiormente semicontinua y secuencialmente inf-compacta. Entonces existe una sucesión (x_n) tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf(f) \quad y \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x} \in S.$$

En particular, $\inf(f) > -\infty$ *y* $S \neq \emptyset$.

Topológico vs secuencial

Proposición

Sea C un subconjunto no vacío de un espacio normado X. Consideremos las siguientes afirmaciones:

1. *C es débilmente cerrado;*
2. *C es débilmente secuencialmente cerrado;*
3. *C es secuencialmente cerrado; y*
4. *C es cerrado.*

Entonces $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftarrow (1)$. *Si C es convexo, las 4 afirmaciones son equivalentes.*

Funciones convexas

Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en un espacio vectorial X es convexa si para cada $x, y \in X$ y cada $\lambda \in (0, 1)$ se cumple que

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Proposición

Son equivalentes:

1. *f es convexa; y*
2. *epi(f) es un conjunto convexo.*

Además, si f es convexa, el conjunto $[f \leq \gamma]$ es convexo para todo $\gamma \in \mathbb{R}$.

Funciones convexas

Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en un espacio vectorial X es convexa si para cada $x, y \in X$ y cada $\lambda \in (0, 1)$ se cumple que

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Proposición

Son equivalentes:

1. *f es convexa; y*
2. *epi(f) es un conjunto convexo.*

Además, si f es convexa, el conjunto $[f \leq \gamma]$ es convexo para todo $\gamma \in \mathbb{R}$.

Topológico vs secuencial

Proposición

Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia en un espacio normado X. Consideremos las siguientes afirmaciones:

1. *f es débilmente inferiormente semicontinua;*
2. *f es débilmente secuencialmente inferiormente semicontinua;*
3. *f es secuencialmente inferiormente semicontinua; y*
4. *f es inferiormente semicontinua.*

Entonces $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftarrow (1)$. Si f es convexa, las 4 afirmaciones son equivalentes.

Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en un espacio normado es coerciva si

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Proposición

Son equivalentes:

1. *f es coerciva; y*
2. *El conjunto $[f \leq \gamma]$ es acotado para cada $\gamma \in \mathbb{R}$.*

Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en un espacio normado es coerciva si

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Proposición

Son equivalentes:

1. *f es coerciva; y*
2. *El conjunto $[f \leq \gamma]$ es acotado para cada $\gamma \in \mathbb{R}$.*

Weierstrass-Hilbert-Tonelli, caso convexo

Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en un espacio vectorial X es convexa si para cada $x, y \in X$ distintos y cada $\lambda \in (0,1)$ se cumple que

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Teorema

Sea X un espacio de Banach reflexivo y sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia, convexa, inferiormente semicontinua y coerciva. Entonces S es convexo, débilmente compacto y no vacío. Si, además, f es estrictamente convexa, S se reduce a un punto.

Weierstrass-Hilbert-Tonelli, caso convexo

Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en un espacio vectorial X es convexa si para cada $x, y \in X$ distintos y cada $\lambda \in (0, 1)$ se cumple que

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Teorema

Sea X un espacio de Banach reflexivo y sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia, convexa, inferiormente semicontinua y coerciva. Entonces S es convexo, débilmente compacto y no vacío. Si, además, f es estrictamente convexa, S se reduce a un punto.

Ejercicio: Existencia de solución

Consideremos el problema de minimizar

$$J(z) = \int_a^b L(\tau, z(\tau), z'(\tau))\, d\tau,$$

donde $z \in C^1([a,b];\mathbb{R}^N)$ satisface $z(a) = A$ y $z(b) = B$.

Teorema

Supongamos que

- $L(t,y,v) \geq \mu + \nu\|v\|^p$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\nu > 0$, $p \in (1,\infty)$
- $L(t,y,v) = f(t,y) + g(t,v)$, f, g *medibles*
  - f *inferiormente semicontinua en* y
  - g *inferiormente semicontinua y convexa en* v

Entonces, el problema tiene solución $\bar{z}$ *con* $\bar{z}' \in L^p(a,b;\mathbb{R}^N)$.

Condiciones de Optimalidad

Caso Diferenciable

Derivada direccional y de Gâteaux (gradiente)

Sean $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $x \in \mathrm{dom}(f)$, y consideremos $d \neq 0$.

La derivada direccional de f en el punto x y en la dirección d es

$$f'(x; d) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + td) - f(x)}{t},$$

cuando este límite exista.

Si la función $L : X \to \mathbb{R}$, definida por $L(d) = f'(x; d)$, es lineal y continua, decimos que f es diferenciable en el sentido de Gâteaux.

En ese caso, $L \in X^*$ es la derivada de Gâteaux de f en x, y la denotamos por $\nabla f(x)$.

Derivada direccional y de Gâteaux (gradiente)

Sean $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $x \in \mathrm{dom}(f)$, y consideremos $d \neq 0$.

La derivada direccional de f en el punto x y en la dirección d es

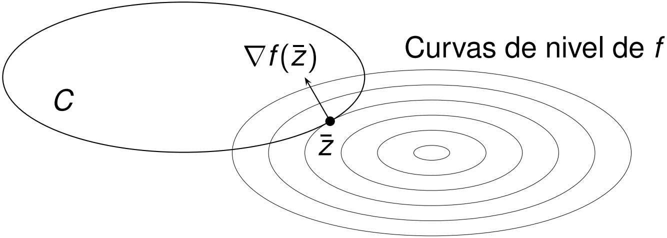
$$f'(x; d) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + td) - f(x)}{t},$$

cuando este límite exista.

Si la función $L : X \to \mathbb{R}$, definida por $L(d) = f'(x; d)$, es lineal y continua, decimos que f es diferenciable en el sentido de Gâteaux.

En ese caso, $L \in X^*$ es la derivada de Gâteaux de f en x, y la denotamos por $\nabla f(x)$.

Intuición en $\mathbb{R}^2$



El gradiente apunta hacia adentro de C

Condiciones de optimalidad

Teorema

Sean $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $C \subset dom(f)$ un conjunto convexo. Supongamos que $\bar{z}$ minimiza f en C. Si f es diferenciable en $\bar{z}$, entonces $\langle \nabla f(\bar{z}), c - \bar{z} \rangle \geq 0$ para todo $c \in C$.

En particular,

- *Si $C = \{c_0\} + V$, entonces $V \subseteq \ker\left(\nabla f(\bar{z})\right)$.*
- *Si $\bar{z} \in int(C)$, entonces $\nabla f(\bar{z}) = 0$.*

Si f es convexa, la condición también es suficiente.

Condiciones de optimalidad

Teorema

Sean $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *y* $C \subset dom(f)$ *un conjunto convexo. Supongamos que* $\bar{z}$ *minimiza* f *en* C. *Si* f *es diferenciable en* $\bar{z}$, *entonces* $\langle \nabla f(\bar{z}), c - \bar{z} \rangle \geq 0$ *para todo* $c \in C$.

En particular,

- *Si* $C = \{c_0\} + V$, *entonces* $V \subseteq \ker\left(\nabla f(\bar{z})\right)$.
- *Si* $\bar{z} \in int(C)$, *entonces* $\nabla f(\bar{z}) = 0$.

Si f *es convexa, la condición también es suficiente.*

Condiciones de optimalidad

Teorema

Sean $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *y* $C \subset dom(f)$ *un conjunto convexo. Supongamos que* $\bar{z}$ *minimiza* f *en* C. *Si* f *es diferenciable en* $\bar{z}$, *entonces* $\langle \nabla f(\bar{z}), c - \bar{z} \rangle \geq 0$ *para todo* $c \in C$.

En particular,

- *Si* $C = \{c_0\} + V$, *entonces* $V \subseteq \ker\left(\nabla f(\bar{z})\right)$.
- *Si* $\bar{z} \in int(C)$, *entonces* $\nabla f(\bar{z}) = 0$.

Si f *es convexa, la condición también es suficiente.*

Problema clásico del cálculo de variaciones

Consideremos el problema de minimizar

$$J(z) = \int_a^b L(\tau, z(\tau), z'(\tau))\, d\tau,$$

donde $z \in C^1([a,b];\mathbb{R}^N)$ satisface $z(a) = A$ y $z(b) = B$.

Corolario

Si $\bar{z}$ es solución, entonces $J'(\bar{z}; h) = 0$ para toda $h \in C^1([a,b];\mathbb{R}^N)$ tal que $h(a) = h(b) = 0$.

Ecuación de Euler-Lagrange

Obtenemos la siguiente condición necesaria de optimalidad:

Corolario

Si $\bar{z}$ es solución, entonces la función $t \mapsto \nabla_3 L(t, \bar{z}(t), \bar{z}'(t))$ es de clase C^1 y

$$\frac{d}{dt}\nabla_3 L(t, \bar{z}(t), \bar{z}'(t)) = \nabla_2 L(t, \bar{z}(t), \bar{z}'(t))$$

para todo $t \in (a, b)$.

Demostración

Lema

$$J'(z;h) = \int_a^b \Big[\nabla_2 L(t, z(t), z'(t)) \cdot h(t) + \nabla_3 L(t, z(t), z'(t)) \cdot h'(t)\Big] dt$$

Lema

Si $\alpha, \beta \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ satisfacen

$$\int_a^b \Big[\alpha(t)\eta(t) + \beta(t)\eta'(t)\Big]\, dt = 0$$

para toda $\eta \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, entonces $\beta \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ y $\beta'(t) = \alpha(t)$ para todo $t \in (a,b)$.

Demostración

Lema

$$J'(z;h) = \int_a^b \Big[\nabla_2 L(t, z(t), z'(t)) \cdot h(t) + \nabla_3 L(t, z(t), z'(t)) \cdot h'(t)\Big] dt$$

Lema

Si $\alpha, \beta \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ *satisfacen*

$$\int_a^b \Big[\alpha(t)\eta(t) + \beta(t)\eta'(t)\Big]\, dt = 0$$

para toda $\eta \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ *tal que* $\eta(a) = \eta(b) = 0$*, entonces* $\beta \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ *y* $\beta'(t) = \alpha(t)$ *para todo* $t \in (a,b)$*.*

Ejercicio: control óptimo lineal-cuadrático

En el problema de control óptimo, considere

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \Big[u(t)^* U(t) u(t) + x_u(t)^* W(t) x_u(t)\Big]\, dt + h(x_u(T))$$

Teorema (Principio del Máximo, a demostrar)

El par $(\bar{u}, x_{\bar{u}})$ es solución si, y solo si,

$$\bar{u}(t) = U(t)^{-1} B(t)^* p(t)$$

para casi todo $t \in (0, T)$, donde p es la única solución de

$$p'(t) = -A(t)^* p(t) + W(t) x_{\bar{u}}(t), \quad con \quad p(T) = -\nabla h(x_{\bar{u}}(T)).$$