Análisis convexo, cálculo diferencial y aplicaciones

Juan PEYPOUQUET
Universidad Técnica Federico Santa María

V-Escuela 2016

Valparaíso, 11 al 21 de octubre

INTRODUCCIÓN

Problemas de optimización

Problemas de optimización

Consideremos

- Una función objetivo $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$
- Un conjunto factible (no vacío) $C \subset \mathrm{dom}(f)$

Cuando decimos minimizar f sobre C, nos referimos a:

- Calcular el valor del problema:

$$\alpha := \inf\{f(x) : x \in C\}$$

- Encontrar el conjunto solución o argumento del mínimo:

$$S := \{x \in C : f(x) = \alpha\}$$

Problemas de optimización

Consideremos

- Una función objetivo $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$
- Un conjunto factible (no vacío) $C \subset \mathrm{dom}(f)$

Cuando decimos minimizar f sobre C, nos referimos a:

- Calcular el valor del problema:
$$\alpha := \inf\{f(x) : x \in C\}$$
- Encontrar el conjunto solución o argumento del mínimo:
$$S := \{x \in C : f(x) = \alpha\}$$

Problemas de optimización

Consideremos

- Una función objetivo $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$
- Un conjunto factible (no vacío) $C \subset \mathrm{dom}(f)$

Cuando decimos minimizar f sobre C, nos referimos a:

- Calcular el valor del problema:

$$\alpha := \inf\{f(x) : x \in C\}$$

- Encontrar el conjunto solución o argumento del mínimo:

$$S := \{x \in C : f(x) = \alpha\}$$

Problemas de optimización

Consideremos

- Una función objetivo $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$
- Un conjunto factible (no vacío) $C \subset \mathrm{dom}(f)$

Cuando decimos minimizar f sobre C, nos referimos a:

- Calcular el valor del problema:

$$\alpha := \inf\{f(x) : x \in C\}$$

- Encontrar el conjunto solución o argumento del mínimo:

$$S := \{x \in C : f(x) = \alpha\}$$

Algo de clasificación

Optimización discreta: C es un conjunto discreto

- Grafos, redes y caminos
- Programación entera y combinatorial

Optimización continua: $C \subset X$ espacio vectorial (topológico)

- Dimensión finita
  - Programación matemática, estadística, informática
- Dimensión infinita
  - Análisis funcional, cálculo de variaciones, control óptimo, ecuaciones diferenciales, optimización de forma

Algo de clasificación

Optimización discreta: C es un conjunto discreto

- Grafos, redes y caminos
- Programación entera y combinatorial

Optimización continua: $C \subset X$ espacio vectorial (topológico)

- Dimensión finita
  - Programación matemática, estadística, informática
- Dimensión infinita
  - Análisis funcional, cálculo de variaciones, control óptimo, ecuaciones diferenciales, optimización de forma

Algo de clasificación

Optimización discreta: C es un conjunto discreto

- Grafos, redes y caminos
- Programación entera y combinatorial

Optimización continua: $C \subset X$ espacio vectorial (topológico)

- Dimensión finita
  - Programación matemática, estadística, informática
- Dimensión infinita
  - Análisis funcional, cálculo de variaciones, control óptimo, ecuaciones diferenciales, optimización de forma

Algo de clasificación

Optimización discreta: C es un conjunto discreto

- Grafos, redes y caminos
- Programación entera y combinatorial

Optimización continua: $C \subset X$ espacio vectorial (topológico)

- Dimensión finita
  - Programación matemática, estadística, informática
- Dimensión infinita
  - Análisis funcional, cálculo de variaciones, control óptimo, ecuaciones diferenciales, optimización de forma

Norma de un funcional lineal continuo

Si X es un espacio normado, se define la norma dual como:

$$\|L\|_{X^*} = \sup\{\, L(x) \,:\, \|x\|_X = 1\}, \quad \text{para } L \in X^*$$

- Problema de valor importante en análisis funcional
- No siempre se alcanza el supremo
- El conjunto de los elementos de X^* que alcanzan el máximo es denso en X^*
- Si X es reflexivo, el máximo se alcanza para cada $L \in X^*$
- Si X es estrictamente convexo, la solución es única

Norma de un funcional lineal continuo

Si X es un espacio normado, se define la norma dual como:

$$\|L\|_{X^*} = \sup\{ L(x) \;:\; \|x\|_X = 1\}, \quad \text{para } L \in X^*$$

- Problema de valor importante en análisis funcional
- No siempre se alcanza el supremo
- El conjunto de los elementos de X^* que alcanzan el máximo es denso en X^*
- Si X es reflexivo, el máximo se alcanza para cada $L \in X^*$
- Si X es estrictamente convexo, la solución es única

Norma de un funcional lineal continuo

Si X es un espacio normado, se define la norma dual como:

$$\|L\|_{X^*} = \sup\{ L(x) \;:\; \|x\|_X = 1\}, \quad \text{para } L \in X^*$$

- Problema de valor importante en análisis funcional
- No siempre se alcanza el supremo
- El conjunto de los elementos de X^* que alcanzan el máximo es denso en X^*
- Si X es reflexivo, el máximo se alcanza para cada $L \in X^*$
- Si X es estrictamente convexo, la solución es única

Norma de un funcional lineal continuo

Si X es un espacio normado, se define la norma dual como:

$$\|L\|_{X^*} = \sup\{\, L(x) \,:\, \|x\|_X = 1\}, \quad \text{para } L \in X^*$$

- Problema de valor importante en análisis funcional
- No siempre se alcanza el supremo
- El conjunto de los elementos de X^* que alcanzan el máximo es denso en X^*
- Si X es reflexivo, el máximo se alcanza para cada $L \in X^*$
- Si X es estrictamente convexo, la solución es única

Norma de un funcional lineal continuo

Si X es un espacio normado, se define la norma dual como:

$$\|L\|_{X^*} = \sup\{\, L(x) \;:\; \|x\|_X = 1\}, \quad \text{para } L \in X^*$$

- Problema de valor importante en análisis funcional
- No siempre se alcanza el supremo
- El conjunto de los elementos de X^* que alcanzan el máximo es denso en X^*
- Si X es reflexivo, el máximo se alcanza para cada $L \in X^*$
- Si X es estrictamente convexo, la solución es única

Norma de un funcional lineal continuo

Si X es un espacio normado, se define la norma dual como:

$$\|L\|_{X^*} = \sup\{\, L(x) \;:\; \|x\|_X = 1\}, \quad \text{para } L \in X^*$$

- Problema de valor importante en análisis funcional
- No siempre se alcanza el supremo
- El conjunto de los elementos de X^* que alcanzan el máximo es denso en X^*
- Si X es reflexivo, el máximo se alcanza para cada $L \in X^*$
- Si X es estrictamente convexo, la solución es única

Problemas de optimización

Acerca de las soluciones

- Existencia y unicidad
- Caracterización (condiciones de optimalidad)
- Otras propiedades

Sobre la resolución

- Métodos basados en condiciones de optimalidad
- Métodos iterativos de aproximación

Problemas de optimización

Acerca de las soluciones

- Existencia y unicidad
- Caracterización (condiciones de optimalidad)
- Otras propiedades

Sobre la resolución

- Métodos basados en condiciones de optimalidad
- Métodos iterativos de aproximación

Problemas de optimización

Acerca de las soluciones

- Existencia y unicidad
- Caracterización (condiciones de optimalidad)
- Otras propiedades

Sobre la resolución

- Métodos basados en condiciones de optimalidad
- Métodos iterativos de aproximación

Problemas de optimización

Acerca de las soluciones

- Existencia y unicidad
- Caracterización (condiciones de optimalidad)
- Otras propiedades

Sobre la resolución

- Métodos basados en condiciones de optimalidad
- Métodos iterativos de aproximación

Problemas de optimización

Acerca de las soluciones

- Existencia y unicidad
- Caracterización (condiciones de optimalidad)
- Otras propiedades

Sobre la resolución

- Métodos basados en condiciones de optimalidad
- Métodos iterativos de aproximación

Problemas de optimización

Acerca de las soluciones

- Existencia y unicidad
- Caracterización (condiciones de optimalidad)
- Otras propiedades

Sobre la resolución

- Métodos basados en condiciones de optimalidad
- Métodos iterativos de aproximación

Problemas de optimización

Acerca de las soluciones

- Existencia y unicidad
- Caracterización (condiciones de optimalidad)
- Otras propiedades

Sobre la resolución

- Métodos basados en condiciones de optimalidad
- Métodos iterativos de aproximación

Algo que todos sabemos

Siendo muy niños aprendimos lo siguiente:

- Teorema de Weierstrass: Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, alcanza su máximo y su mínimo
- Regla de Fermat: Si f tiene un mínimo local en $\bar{x} \in (a, b)$ y es diferenciable allí, entonces $f'(\bar{x}) = 0$

Si queremos encontrar $\bar{x}$, primero resolvemos la ecuación $f'(\bar{x}) = 0$ de forma analítica o numérica. Luego comparamos con los valores en los extremos, y donde f no sea diferenciable

Algo que todos sabemos

Siendo muy niños aprendimos lo siguiente:

- Teorema de Weierstrass: Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, alcanza su máximo y su mínimo
- Regla de Fermat: Si f tiene un mínimo local en $\bar{x} \in (a, b)$ y es diferenciable allí, entonces $f'(\bar{x}) = 0$

Si queremos encontrar $\bar{x}$, primero resolvemos la ecuación $f'(\bar{x}) = 0$ de forma analítica o numérica. Luego comparamos con los valores en los extremos, y donde f no sea diferenciable

Algo que todos sabemos

Siendo muy niños aprendimos lo siguiente:

- Teorema de Weierstrass: Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, alcanza su máximo y su mínimo
- Regla de Fermat: Si f tiene un mínimo local en $\bar{x} \in (a, b)$ y es diferenciable allí, entonces $f'(\bar{x}) = 0$

Si queremos encontrar $\bar{x}$, primero resolvemos la ecuación $f'(\bar{x}) = 0$ de forma analítica o numérica. Luego comparamos con los valores en los extremos, y donde f no sea diferenciable

En este curso

- Presentaremos los principales conceptos del cálculo diferencial y el análisis convexo en espacios normados
- Los aplicaremos para deducir la existencia y unicidad de solución para problemas de optimización
- Caracterizaremos las soluciones, aunque la función objetivo no sea diferenciable (quizá ni siquiera continua)
- Conoceremos los métodos iterativos de primer orden para aproximar las soluciones

En este curso

- Presentaremos los principales conceptos del cálculo diferencial y el análisis convexo en espacios normados
- Los aplicaremos para deducir la existencia y unicidad de solución para problemas de optimización
- Caracterizaremos las soluciones, aunque la función objetivo no sea diferenciable (quizá ni siquiera continua)
- Conoceremos los métodos iterativos de primer orden para aproximar las soluciones

En este curso

- Presentaremos los principales conceptos del cálculo diferencial y el análisis convexo en espacios normados
- Los aplicaremos para deducir la existencia y unicidad de solución para problemas de optimización
- Caracterizaremos las soluciones, aunque la función objetivo no sea diferenciable (quizá ni siquiera continua)
- Conoceremos los métodos iterativos de primer orden para aproximar las soluciones

En este curso

- Presentaremos los principales conceptos del cálculo diferencial y el análisis convexo en espacios normados
- Los aplicaremos para deducir la existencia y unicidad de solución para problemas de optimización
- Caracterizaremos las soluciones, aunque la función objetivo no sea diferenciable (quizá ni siquiera continua)
- Conoceremos los métodos iterativos de primer orden para aproximar las soluciones

ALGUNOS EJEMPLOS

Problemas en dimensión infinita

La Braquistócrona y el Problema Clásico del Cálculo de Variaciones

Ejemplo: La braquistócrona

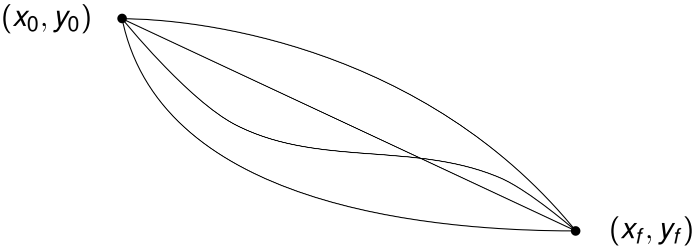
Llegar de (x_0, y_0) a (x_f, y_f) lo más rápido posible usando solamente la gravedad

(x_0, y_0)

(x_f, y_f)

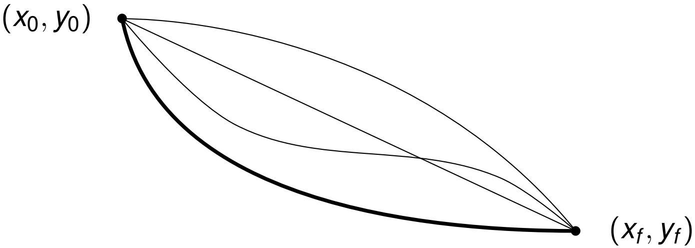
Ejemplo: La braquistócrona

Llegar de (x_0, y_0) a (x_f, y_f) lo más rápido posible usando solamente la gravedad



Ejemplo: La braquistócrona

Llegar de (x_0, y_0) a (x_f, y_f) lo más rápido posible usando solamente la gravedad



Ejemplo: La braquistócrona

Rapidez usando parametrización en longitud de arco

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt} = \sqrt{1+(y')^2}\,\frac{dx}{dt}$$

Conservación de la energía mecánica

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_0 \qquad \Longrightarrow \qquad v = \sqrt{2g(y_0 - y)}$$

Tiempo transcurrido

$$T[y] = \int_{x_0}^{x_f} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}}\,dx, \quad \text{con} \quad y(x_0) = y_0,\; y(x_f) = y_f$$

Ejemplo: La braquistócrona

Rapidez usando parametrización en longitud de arco

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt} = \sqrt{1 + (y')^2}\,\frac{dx}{dt}$$

Conservación de la energía mecánica

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_0 \qquad \Longrightarrow \qquad v = \sqrt{2g(y_0 - y)}$$

Tiempo transcurrido

$$T[y] = \int_{x_0}^{x_f} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}}\,dx, \quad \text{con} \quad y(x_0) = y_0,\; y(x_f) = y_f$$

Ejemplo: La braquistócrona

Rapidez usando parametrización en longitud de arco

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt} = \sqrt{1+(y')^2}\,\frac{dx}{dt}$$

Conservación de la energía mecánica

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_0 \qquad \Longrightarrow \qquad v = \sqrt{2g(y_0 - y)}$$

Tiempo transcurrido

$$T[y] = \int_{x_0}^{x_f} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}}\,dx, \quad \text{con} \quad y(x_0) = y_0,\ y(x_f) = y_f$$

El problema clásico del CdV

El problema general del cálculo de variaciones es

Minimizar
$$J(z) = \int_{\tau_0}^{\tau_f} L(\tau, z(\tau), z'(\tau))\, d\tau,$$

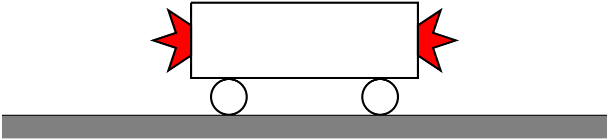
donde $z \in C^1([\tau_0, \tau_f]; \mathbb{R}^N)$ satisface

$$\begin{cases} z(\tau_0) & = & z_0 \\ z(\tau_f) & = & z_f \end{cases}$$

Típicamente asumiremos que $L \in C^1(\mathbb{R}^{1+N+N}; \mathbb{R})$.

El Carro-Cohete y el Problema de Control Óptimo

Ejemplo: El carro-cohete

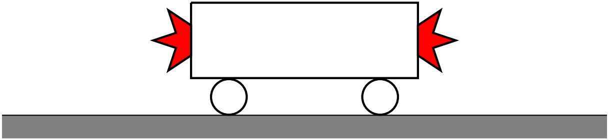


La dinámica está dada por

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u$$

x posición, v velocidad, u fuerza aplicada por los cohetes

Ejemplo: El carro-cohete



La dinámica está dada por

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u$$

x posición, v velocidad, u fuerza aplicada por los cohetes

Ejemplo: El carro-cohete

Nos interesa minimizar

$$J(u) = x_u(T) + \frac{\mu}{2} \int_0^T u(t)^2 \, dt$$

La resolución de este problema entrega un balance entre

- mover el carro hacia la izquierda
- mantener baja la inversión en energía

Problema general: sistemas controlados

Consideremos el sistema

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & A(t)x(t) + B(t)u(t) + c(t), \quad t \in (0, T) \\ x(0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

$x(t) \in \mathbb{R}^N$ es el estado en el instante t

$u(t) \in \mathbb{R}^M$ es un control que actúa sobre el sistema en t

Las funciones $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ y $c(\cdot)$ son suficientemente regulares

Sistemas controlados

Consideremos el sistema

$$(S) \qquad \begin{cases} x'(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + c(t), \quad t \in (0,T) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

Lema

- *Para cada $u \in L^p(0,T;\mathbb{R}^M)$, con $p \in [1,\infty]$, existe una única solución $x_u \in AC([0,T];\mathbb{R}^N)$*
- *La función $u \mapsto x_u$ es afín y continua de $L^p(0,T;\mathbb{R}^M)$ débil en $C^0([0,T];\mathbb{R}^N)$.*

Sistemas controlados

Consideremos el sistema

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & A(t)x(t) + B(t)u(t) + c(t), \quad t \in (0, T) \\ x(0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

Lema

- *Para cada $u \in L^p(0, T; \mathbb{R}^M)$, con $p \in [1, \infty]$, existe una única solución $x_u \in AC([0, T]; \mathbb{R}^N)$*
- *La función $u \mapsto x_u$ es afín y continua de $L^p\left(0, T; \mathbb{R}^M\right)$ débil en $C^0\left([0, T]; \mathbb{R}^N\right)$.*

El problema de control óptimo

El problema general del control óptimo es

Minimizar

$$J(u) = \int_{\tau_0}^{\tau_f} L(\tau, x_u(\tau), u(\tau))\, d\tau + h(x_u(\tau_f))$$

Sujeto a

$$\begin{cases} x_u(t_0) & = & x_0 \\ x_u(t_f) & \in & \mathcal{O} \qquad \text{(controlabilidad)} \end{cases}$$

Control óptimo y cálculo de variaciones

Como caso particular, tomando

$$A \equiv 0, \quad B \equiv I, \quad c \equiv 0, \quad h \equiv 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{O} = \{z_f\}$$

obtenemos el problema clásico del cálculo de variaciones:

Minimizar

$$J(z) = \int_{\tau_0}^{\tau_f} L(\tau, z(\tau), z'(\tau))\, d\tau$$

Sujeto a

$$\begin{cases} z(\tau_0) & = & z_0 \\ z(\tau_f) & = & z_f \end{cases}$$