UTFSM-PUCV-UV
V Escuela de Matemática Valparaíso
Análisis convexo, cálculo diferencial y aplicaciones
Octubre 2016

EXAMEN

Resuelva justificando adecuadamente

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado, $\gamma > 0$, $\mu \geq 0$ y $h \in L^2(\Omega;\mathbb{R})$. Para cada $u \in X = H_0^1(\Omega;\mathbb{R})$, definimos

$$J(u) = \frac{\gamma}{2}\int_\Omega |u(\zeta)|^2\, d\zeta + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(\zeta)|^2\, d\zeta - \int_\Omega h(\zeta)u(\zeta)\, d\zeta + \mu\int_\Omega |\nabla u(\zeta)|\, d\zeta.$$

(1) Demuestre que J tiene un único minimizador $\bar{u}$ en X.
Sugerencia: Use el Teorema de Weierstrass-Hilbert-Tonelli en el caso (estrictamente) convexo.

(2) Escriba la condición de optimalidad que caracteriza a $\bar{u}$.

(3) Suponga que $\mu = 0$ y que $\bar{u}$ es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\overline{\Omega}$. Compruebe que $\gamma\bar{u} - \Delta\bar{u} = h$ en Ω y $\bar{u} = 0$ en $\partial\Omega$.
Sugerencia: Use la Fórmula de Green.

(4) Volviendo al caso general ($\mu \geq 0$, $\bar{u} \in X$), describa cómo opera el algoritmo gradiente-proximal para aproximar $\bar{u}$.

Tiempo: 3h00