Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2017/01
MAT225

TAREA III

Resuelva cada problema justificando adecuadamente

Problema 1. Demuestre que si se cumple el segundo axioma de numerabilidad, el espacio es de Lindelöf.

Problema 2. Pruebe que un espacio de Hausdorff es normal si, y solo si, para cada cerrado C y cada abierto A que contenga a C existe un abierto B tal que $C \subset B$ y $\overline{B} \subset A$.

Problema 3. Demuestre que todo conjunto abierto y conexo en un espacio normado es conexo por arcos.

Problema 4. Sea $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de compactos en un espacio de Hausdorff. Compruebe que si A es un abierto que contiene a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $C_n \subset A$ para todo $n \geq N$.

Problema 5. Un espacio X es *localmente compacto* si cada punto tiene una base de vecindades con adherencia compacta. Demuestre que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de abiertos densos en un espacio localmente compacto y de Hausdorff, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es densa.