Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2017/01
MAT225

TAREA II

Resuelva cada problema justificando adecuadamente

Problema 1. Considere el espacio $X = \mathbb{R}^N$ con la norma $\|x\| = \max_{1 \le i \le N} |x_i|$.

(1) Determine $\|x^*\|_*$ para $x^* \in X^*$.
(2) Defina $S : X \to X^*$ mediante $Sx = x^T$. Calcule $\|S\|_{\mathcal{L}(X;X^*)}$ y $\|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^*;X)}$.

Problema 2. Sea X un espacio normado. Demuestre que X es de Banach si, y solo si, para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, se cumple que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim_{N\to+\infty} \sum_{n\le N} x_n.$$

Problema 3. Sean X, Y, Z espacios normados y sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones Fréchet-diferenciables. Demuestre que $g \circ f$ es Fréchet-diferenciable y calcule su derivada.

Problema 4. Sea $X = \mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{R}^N)$ con la norma $\|x\|_X = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty$. Sea $\ell : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continuamente Fréchet-diferenciable. Defina $J : X \to \mathbb{R}$ mediante

$$J(x) = \int_a^b \ell(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt.$$

(1) Demuestre que J es Fréchet-diferenciable en X y calcule su derivada.
(2) Suponga que $y \in X$ es tal que $J(y) \le J(x)$ para todo $x \in X$. Pruebe que la función $t \mapsto \partial_3 \ell(t, y(t), \dot{y}(t))$ es continuamente diferenciable en (a,b) y para todo $t \in (a,b)$ se tiene

$$\partial_2 \ell(t, y(t), \dot{y}(t)) = \frac{d}{dt} \partial_3 \ell(t, y(t), \dot{y}(t)).$$

Problema 5. Sea X un espacio de Hilbert y sean $A, B \subset X$ conjuntos convexos, disjuntos y no vacíos. Suponga que A es compacto y B es cerrado.

(1) Demuestre que existen $\bar{a} \in A$ y $\bar{b} \in B$ tales que $\|\bar{a} - \bar{b}\| = \min\{\|a-b\| : a \in A,\ b \in B\}$, $P_A(\bar{b}) = \bar{a}$ y $P_B(\bar{a}) = \bar{b}$.
(2) Deduzca que existen $v \in X \setminus \{0\}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\langle v, a\rangle + \varepsilon \le \langle v, b\rangle$ para todo $a \in A$ y $b \in B$.