Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2017/01
MAT225

TAREA I

Resuelva cada problema justificando adecuadamente

Problema 1. Sea (X, d) un espacio métrico.

(1) Pruebe que para cada $C \subset X$, la función $x \mapsto d(x, C)$ es continua.
(2) Demuestre que C es cerrado si, y sólo si, $d(x, C) > 0$ para todo $x \notin C$.
(3) Sean $C_1, C_2 \subset X$ dos conjuntos cerrados, no vacíos y disjuntos. Construya una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f\big|_{C_1} \equiv 0$ y $f\big|_{C_2} \equiv 1$.
(4) Deduzca que existen abiertos disjuntos $A_1, A_2 \subset X$ tales que $C_1 \subset A_1$ y $C_2 \subset A_2$.

Problema 2. Un espacio métrico es *conexo* si no puede representarse como la unión de dos abiertos no vacíos y disjuntos.

(1) Sean (X, d) e (Y, δ) espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Demuestre que si X es conexo, también lo es $f(X)$.
(2) Pruebe que un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo si, y sólo si, es un intervalo.
(3) Deduzca el Teorema del Valor Intermedio.

Problema 3. Compruebe que el espacio $\ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{R})$, con la métrica usual, es un espacio métrico completo y separable. Muestre que $\bar{B}(0, 1)$ no es compacta.

Problema 4. Sea (X, d) un espacio métrico.

(1) Demuestre que X es completo si, y sólo si, toda sucesión anidada de bolas cerradas, cuyo radio tienda a cero, tiene intersección no vacía.
(2) Pruebe que si X es completo y no tiene puntos aislados, no puede ser numerable.

Problema 5. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento de un espacio métrico compacto X. Pruebe que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $x \in X$ hay un $A_x \in \mathcal{A}$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A_x$.
Sugerencia: Demuestre la continuidad de la función $\phi : X \to \mathbb{R}$, definida por

$$\phi(x) := \sup\{r > 0 : B(x, r) \subset A \text{ para algún } A \in \mathcal{A}\}.$$