Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2017/01
MAT225

TALLER III

Problema 1. Sea Y un espacio de Banach, y sean $f : [a, b] \to Y$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Supongamos que f y g son Fréchet-diferenciables en (a, b) y que $\|Df(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R};Y)} \leq Dg(t)$ para todo $t \in (a, b)$.[1]

(1) Dado $\varepsilon > 0$, defina

$$U = \{t \in [a, b] : \|f(t) - f(a)\|_Y > g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) + \varepsilon\}.$$

Pruebe que U es abierto en $[a, b]$.

(2) Suponga que $U \neq \emptyset$ y defina $c = \inf(U)$. Compruebe que $c > a$, $c < b$ y $c \notin U$.

(3) Use la definición de $Df(c)$ y $Dg(c)$, y el hecho de que $c \notin U$, para deducir que $U = \emptyset$.

(4) Concluya que $\|f(b) - f(a)\|_Y \leq g(b) - g(a)$.

(5) Analice el caso $g(t) = Kt$ con $K > 0$.

<u>Solución:</u> (1) Definimos $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ mediante

$$h(t) = \|f(t) - f(a)\|_Y - \big[g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) + \varepsilon\big],$$

de manera que h es continua y $U = h^{-1}((0, \infty))$ es abierto en $[a, b]$.

(2) • $c > a$: como h es continua y $h(a) < 0$, $h < 0$ en $[a, a + \delta)$, con lo cual $c \geq a + \delta > a$.
• $c < b$: si $c = b$, entonces $U = \{b\}$, que no es abierto.
• $c \notin U$: como U es abierto, si $c \in U$, entonces $c \in \operatorname{int}(U)$. Dado que $c > a$, esto contradice la definición de ínfimo.

(3) Existe $\delta > 0$ tal que para todo $h \in (0, \delta)$, se tiene

$$\begin{aligned} \|f(c + h) - f(c) - Df(c)h\|_Y &\leq \frac{\varepsilon}{2}h \\ |g(c + h) - g(c) - Dg(c)h| &\leq \frac{\varepsilon}{2}h. \end{aligned}$$

Por desigualdad triangular, vemos que

$$\|f(c + h) - f(c)\|_Y \leq \|Df(c)h\|_Y + \frac{\varepsilon}{2}h \leq Dg(c)h + \frac{\varepsilon}{2}h \leq g(c + h) - g(c) + \varepsilon h.$$

Por otra parte, como $c \notin U$,

$$\|f(c) - f(a)\|_Y \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon.$$

[1] Note que g debe ser creciente.

Concluimos que, para todo $h \in (0, \delta)$,

$$\begin{aligned} \|f(c+h) - f(a)\|_Y &\leq \|f(c+h) - f(c)\|_Y + \|f(c) - f(a)\|_Y \\ &\leq g(c+h) - g(a) + \varepsilon(c+h-a) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego, el intervalo $(c, c+\delta)$ no intersecta a U, de modo que $c \neq \inf(U)$, y así $U = \emptyset$.

(4) Como $U = \emptyset$, $b \notin U$. Luego

$$\|f(b) - f(a)\|_Y \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b-a) + \varepsilon.$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, concluimos que $\|f(b) - f(a)\|_Y \leq g(b) - g(a)$.

(5) Si $\|Df(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R};Y)} \leq K$, entonces $\|f(b) - f(a)\|_Y \leq K(b-a)$.

Problema 2. Sean X, Y espacios de Banach, y sea $A \subset X$ abierto. Suponga que $F : A \to Y$ es Fréchet-diferenciable. Sean $u, v \in A$ tales que $u + t(v-u) \in A$ para todo $t \in (0,1)$.

(1) Defina $f : [0,1] \to Y$ mediante $f(t) = F(u + t(v-u))$. Pruebe que f es continua en $[0,1]$ y Fréchet-diferenciable en $(0,1)$. Calcule su derivada.

(2) Demuestre que

$$\|F(u) - F(v)\|_Y \leq \|u - v\|_X \cdot \sup_{t \in [0,1]} \|DF(u + t(v-u))\|_{\mathcal{L}(X;Y)}.$$

Solución: (1) Primero, f es continua por ser composición de funciones continuas. Para la derivada, el candidato razonable es $Df(t) = DF(u_t)(v-u)$, donde $u_t = u + t(v-u)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|f(t+h) - f(t) - hDF(u_t)(v-u)\|_Y &= \|F(u_{t+h}) - F(u_t) - hDF(u_t)(v-u)\|_Y \\ &= \|F(u_t + h(v-u)) - F(u_t) - DF(u_t)[h(v-u)]\|_Y \end{aligned}$$

Como F es Fréchet-diferenciable en u_t,

$$\lim_{\|z\|_X \to 0} \frac{1}{\|z\|} \|F(u_t + z) - F(u_t) - DF(u_t)[z]\|_Y = 0.$$

Concluimos que si

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{1}{|h|} \|f(t+h) - f(t) - hDf(t)\|_Y = 0.$$

(2) Usamos la parte (5) del problema anterior con $K = \sup_{t \in [0,1]} \|Df(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R};Y)}$:

$$\|F(u) - F(v)\|_Y = \|f(1) - f(0)\|_Y \leq K \leq \|u - v\|_X \cdot \sup_{t \in [0,1]} \|DF(u + t(v-u))\|_{\mathcal{L}(X;Y)}.$$