UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SEMESTRE 2017/01
MAT225

TALLER II

El objetivo de este taller es demostrar el Teorema de Hahn-Banach en $\mathbb{R}^N$.

Teorema 1. *Sean $A, B \subset X$ conjuntos convexos, no vacíos y disjuntos.*

i) *Si A es abierto, existe $L \in X^* \setminus \{0\}$ tal que $\langle L, x\rangle < \langle L, y\rangle$ para cada $x \in A$ e $y \in B$.*
ii) *Si A es compacto y B es cerrado, existen $L \in X^* \setminus \{0\}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\langle L, x\rangle + \varepsilon \leq \langle L, y\rangle$ para cada $x \in A$ e $y \in B$.*

Teorema 2. *Sea $C \subset X$ un conjunto convexo y no vacío que no contenga al 0.*

i) *Si C es abierto, existe $L \in X^* \setminus \{0\}$ tal que $\langle L, x\rangle < 0$ para cada $x \in C$.*
ii) *Si C es cerrado, existen $L \in X^* \setminus \{0\}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\langle L, x\rangle + \varepsilon \leq 0$ para cada $x \in C$.*

Teorema 3. *Sea $C \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto convexo y no vacío que no contenga al 0. Entonces existe $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tal que $v \cdot x \leq 0$ para cada $x \in C$. En particular, si $N \geq 2$ y C es abierto, entonces $\{v\}^\perp$ es un subespacio no trivial de $\mathbb{R}^N$ que no intersecta a C. Si, en cambio, C es cerrado, existe $\varepsilon > 0$ tal que $v \cdot x + \varepsilon \leq 0$ para cada $x \in C$.*

Problema 1. Demuestre que los Teoremas 1 y 2 son equivalentes. Pista: Para probar que el Teorema 2 implica el Teorema 1, defina $C = \{c : a - b : a \in A,\ b \in B\}$.

Solución. Teorema 1 $\Rightarrow$ Teorema 2: Para la parte i) tomamos $A = C$ y $B = \{0\}$. Para la parte ii) tomamos $A = \{0\}$ (que es compacto por ser finito) y $B = C$.
Teorema 2 $\Rightarrow$ Teorema 1: Definimos $C = A - B$. Claramente $A \cap B \neq \emptyset$ si, y sólo si, $0 \notin C$. Además es convexo, dado que A y B lo son. En efecto, si $c_1, c_2 \in C$, entonces

$$\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 = \big(\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2\big) - \big(\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2\big) \in C.$$

Para la parte i), si A es abierto, entonces $C = \bigcup_{b \in B}(A - \{b\})$ es abierto por ser unión de abiertos. Para la parte ii), si A es compacto y B es cerrado, veamos que C es cerrado. Sea (c_n) una sucesión en C que converge a algún $x \in X$. Debemos ver que $x \in C$. Como $c_n = a_n - b_n$ con $a_n \in A$ y $b_n \in B$, y como A es compacto, existe una subsucesión (a_{k_n}) que converge a algún $a \in A$. La sucesión (b_{k_n}) converge a $x - a$, que debe pertenecer a B, pues es cerrado. Concluimos que $x = a + (x - a) \in C$.

Problema 2. Demuestre el Teorema 3. Para ello, escoja primero un subconjunto $\{x_n\}_{n\geq 1}$ denso en C. Para cada $n \geq 1$ defina

$$C_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^N : x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \text{ con } \lambda_k \geq 0 \ \forall k \text{ y } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \right\}.$$

Observe que para cada $n \geq 1$, se cumple que C_n es convexo, cerrado y $0 \notin C_n$. Denote por p_n el elemento de C_n que tiene norma mínima. ¿Está bien definido?

(1) Pruebe que $0 \leq p_n \cdot x_k$ para cada $n \geq k \geq 1$.
(2) Utilice la sucesión $\left(\frac{p_n}{\|p_n\|}\right)_{n\geq 1}$ para encontrar el vector $v \neq 0$ con las propiedades requeridas.
(3) ¿Qué ocurre si C es abierto? <u>Pista:</u> ¿Qué ocurre si $\{v\}^\perp$ intersecta a C?
(4) ¿Y si es cerrado? <u>Pista:</u> $0 < d(0, C) \leq \inf \|p_n\|$.

Solución. p_n está bien definido porque C_n es convexo y cerrado.

(1) Dados $n \geq k \geq 1$ y $t \in (0, 1)$, tenemos

$$\|p_n\|^2 \leq \|p_n + t(x_k - p_n)\|^2 = \|p_n\|^2 + t^2\|x_k - p_n\|^2 + 2\, t\, p_n \cdot x_k - 2t\|p_n\|^2.$$

Luego,

$$0 \leq \|p_n\|^2 \leq t\|x_k - p_n\|^2 + 2\, p_n \cdot x_k.$$

Concluimos haciendo tender t a 0.

(2) Como la esfera unitaria es compacta, la sucesión tiene algún punto de acumulación p. Por la parte (1), $v = -p$ satisface $v \cdot x_k \leq 0$ para cada k y, por densidad, $v \cdot x \leq 0$ para cada $x \in C$.

(3) Si C es abierto, $v \cdot x < 0$ para todo $x \in C$. En efecto, si $v \cdot \bar{x} = 0$ para algún $\bar{x} \in C = \mathrm{int}(C)$, entonces existe $\eta \in C$ (cercano a $\bar{x}$) tal que $v \cdot \eta > 0$, lo que contradice la parte (2).

(4) Si C es cerrado, definimos $d := d(0, C) > 0$. Por lo visto en la parte (1), tenemos que $d^2 \leq 2\, p_n \cdot x_k$ para cada $n \geq k \geq 1$. Si definimos $\varepsilon = d^2/2$, vemos que $v \cdot x + \varepsilon \leq 0$ para todo $x \in C$.