Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2017/01
MAT225

PAUTA TALLER I

Resuelva justificando adecuadamente

Problema. Sean (X, d) y $(\mathcal{X}, \delta)$ espacios métricos. Considere un subconjunto $C \subset X$ y una función continua $f : C \to \mathcal{X}$.

(1) Pruebe que son equivalentes:
  i) f es continua en C;
  ii) Para cada abierto $V \subset \mathcal{X}$, $f^{-1}(V)$ es abierto en C; y
  iii) Para cada cerrado $V \subset \mathcal{X}$, $f^{-1}(V)$ es cerrado en C.

(2) Demuestre que si C es secuencialmente compacto, entonces $f(C)$ también lo es.

(3) Pruebe ahora que si C es compacto, también lo es $f(C)$.[1]

(4) ¿Qué puede concluir de (2) y (3) cuando $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ (con la distancia usual)?

(5) Compruebe que si C es compacto, entonces f es uniformemente continua.

(6) Demuestre que si C es compacto y f es biyectiva, entonces f^{-1} es continua.

(7) Suponga que C no es cerrado, que f es uniformemente continua, y que $(\mathcal{X}, \delta)$ es completo. Muestre que existe una única función continua $g : \overline{C} \to \mathcal{X}$ que extiende a f. Verifique, además, que g es uniformemente continua.

Solución.

(1) *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Sea $V \subset \mathcal{X}$ abierto y sea $c \in f^{-1}(V)$. Como f es continua en c y V es un abierto que contiene a $f(c)$, existe U abierto de C tal que $c \in U$ y $f(U) \subset V$. Luego, $c \in U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(V)$, de donde c es interior a $f^{-1}(V)$.
ii) $\Rightarrow$ *i)* Sea $c \in C$. Veremos que f es continua en C. Sea V un abierto de $\mathcal{X}$ que contiene a $f(c)$. Entonces, $U := f^{-1}(V)$ es un abierto, contiene a c y $f(U) \subset V$.
La equivalencia *ii)* $\Leftrightarrow$ *iii)* se obtiene tomando complementos y recordando que $f^{-1}(V^c) = \left[f^{-1}(V)\right]^c$ para cualquier conjunto V.

(2) Sea (y_n) una sucesión en $f(C)$. Entonces existe una sucesión (x_n) en C tal que $f(x_n) = y_n$ para cada n. Como C es secuencialmente compacto, existe una subsucesión (x_{k_n}) que converge a algún $\bar{x} \in C$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\rho > 0$ tal que si $d(x, \bar{x}) < \rho$ entonces $\delta(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon$. Como $x_{k_n} \to \bar{x}$, existe N tal que $d(x_{k_n}, \bar{x}) < \rho$ para todo $n \geq N$. Luego $\delta(f(x_{k_n}), f(\bar{x})) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ y así $f(x_{k_n}) \to f(\bar{x}) \in f(C)$.

[1] En los puntos (2) y (3) se pide usar directamente las definiciones, no las equivalencias.

(3) Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de $f(C)$. Para cada $U \in \mathcal{U}$, $f^{-1}(U)$ es un abierto de C y $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es un cubrimiento de C. Como C es compacto, extraemos un subcubrimiento finito $\{f^{-1}(U_i) : i = 1, \ldots N\}$. Luego $\{U_i : i = 1, \ldots N\} \subset \mathcal{U}$ es un subcubrimiento finito para $f(C)$.

(4) Dado que los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ contienen su máximo y su mínimo, toda función continua definida en un subconjunto (secuencialmente) compacto de un espacio métrico, a valores en $\mathbb{R}$, alcanza su máximo y su mínimo (Teorema de Weierstrass).

(5) Sea $\varepsilon > 0$. Buscamos $\rho > 0$ tal que $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$ siempre que $d(x, y) < \rho$. Como f es continua, para cada $x \in C$ existe $\rho_x > 0$ tal que $\delta(f(y), f(x)) < \varepsilon/2$ para todo $y \in B(x, \rho_x)$. La familia $\{B(x, \rho_x/2)\}$ es un cubrimiento de C, que admite un subcubrimiento finito, por compacidad. Luego, existen $x_1, \ldots x_N$ en C y $\rho_1, \ldots, \rho_N$ positivos, tales que $C \subset \bigcup\{B(x_j, \rho_j/2) : j = 1, \ldots, N\}$. Sea $\rho = \frac{1}{2}\min\{\rho_1, \ldots, \rho_N\} > 0$. Supongamos que $d(x, y) < \rho$. Existe J tal que $d(x, x_J) < \rho_J/2 < \rho_J$. Pero entonces $d(y, x_J) \leq d(y, x) + d(x, x_J) < \rho_J$. Tenemos que $\delta(f(x), f(x_J)) < \varepsilon/2$ y $\delta(f(y), f(x_J)) < \varepsilon/2$. Concluimos que $\delta(f(x), f(y)) \leq \delta(f(x), f(x_J)) + \delta(f(x_J), f(y)) < \varepsilon$.

(6) Notemos que $f^{-1} : \mathcal{X} \to C$. Probaremos que para cada cerrado $K \subset C$, el conjunto $\left(f^{-1}\right)^{-1}(K) = f(K)$ es cerrado. Al ser K un subconjunto cerrado del compacto C, es un conjunto compacto. Luego $f(K)$ también es compacto y, por lo tanto, cerrado.

(7) Si $x \in C$, definimos $g(x) := f(x)$. Si $x \in \overline{C} \setminus C$, entonces existe una sucesión (x_n) de elementos de C tal que $x_n \to x$. Como (x_n) es convergente, es de Cauchy. Como f es uniformemente continua, $(f(x_n))$ también es de Cauchy (visto en Ayudantía). Como $\mathcal{X}$ es completo, dicha sucesión converge y podemos escribir $g(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Esta definición es independiente de la sucesión escogida pues, en vista de la continuidad uniforme, si $d(x_n, y_n) \to 0$, entonces $\delta(f(x_n), f(y_n)) \to 0$. Si h es cualquier extensión continua de f, entonces $h(x) = f(x) = g(x)$ para cada $x \in C$ y $h(x) = \lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g(x)$ para cada $x \in \overline{C} \setminus C$, donde (x_n) es cualquier sucesión en C que converja a x. Para la continuidad uniforme, tomemos $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\rho > 0$ tal que $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon/3$ siempre que $d(x, y) < \rho$. Dados $x, y \in \overline{C}$, podemos encontrar $x_C, y_C \in C$ tales que $d(x_C, x) < \rho/3$, $\delta(f(x_C), g(x)) < \varepsilon/3$, $d(y_C, y) < \rho/3$ y $\delta(f(y_C), g(y)) < \varepsilon/3$. Tenemos entonces que

$$d(x_C, y_C) \leq d(x_C, x) + d(x, y) + d(y, y_C) < \rho$$

siempre que $d(x, y) < \rho/3$. Luego $\delta(f(x_C, y_C)) < \varepsilon/3$, de donde

$$\delta(g(x), g(y)) \leq \delta(g(x), f(x_C)) + \delta(f(x_C), f(y_C)) + \delta(f(y_C), g(y)) < \varepsilon.$$