

SOBRE EL CONCEPTO DE COMPACIDAD

El propósito de este ejercicio es analizar las relaciones entre las siguientes definiciones de compacidad en un espacio topológico:

(1) COMPACIDAD

Definición 1. Todo cubrimiento por abiertos admite un subcubrimiento finito.

Definición 2. Toda familia de cerrados con la propiedad de intersecciones finitas tiene intersección no vacía.

(2) COMPACIDAD NUMERABLE

Definición 3. Todo cubrimiento numerable por abiertos admite un subcubrimiento finito.

Definición 4. Toda familia numerable de cerrados con la propiedad de intersecciones finitas tiene intersección no vacía.

(3) PROPIEDAD DE BOLZANO-WEIERSTRASS

Definición 5. Todo conjunto infinito tiene algún punto de acumulación.

Definición 6. Todo conjunto infinito numerable tiene algún punto de acumulación.

(4) COMPACIDAD SECUENCIAL

Definición 7. Toda sucesión tiene alguna subsucesión convergente.

Teorema 1. *En general, se tiene que $(1) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftarrow (4)$. Si el espacio es de Lindelöf (en particular, si satisface el Segundo Axioma de Numerabilidad), es cierto que $(2) \Rightarrow (1)$. Si se cumple el Primer Axioma de Numerabilidad, entonces $(3) \Rightarrow (4)$.*