Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2017/01
MAT225

PAUTA CERTAMEN II

Resuelva cada problema justificando adecuadamente

Problema 1. Sea $E = \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ y considere los espacios $X = (E, \|\cdot\|_\infty)$ e $Y = (E, \|\cdot\|_2)$.

(1) Compruebe que la función identidad en E es un operador acotado de X en Y, pero no de Y en X.

(2) Defina $A : X \to X$ y $B : Y \to X$, mediante la relación

$$[Au](t) = [Bu](t) = \int_a^t u(\tau)\, d\tau.$$

Demuestre que A y B son acotados y calcule sus normas.

Solución: (1) De X en Y: $\|u\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|u\|_\infty$. De Y en X: Para $n \geq 1$, consideremos $u_n = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n$. Tenemos que $\|u_n\|_\infty = 1$ para todo n, mientras que $\|u_n\|_2 = \frac{(b-a)}{n+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

(2) $\|Au\|_\infty \leq (b-a)\|u\|_\infty$, por lo que $\|A\| \leq b-a$. Si $u_1 \equiv 1$, tenemos $[Au_1](t) = t-a$ y $\|Au_1\|_\infty = (b-a)\|u_1\|_\infty$, con lo cual $\|A\| = b-a$. Para B, tenemos que

$$[Bu](t) = \int_a^b \chi_{[a,t]}(s)u(s)ds \leq \|\chi_{[a,t]}\|_2\|u\|_2$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Así, $\|Bu\|_\infty \leq \sqrt{b-a}\|u\|_2$. Por otra parte, $\|Bu_1\|_\infty = b-a = \sqrt{b-a}\|u_1\|_2$, y concluimos que $\|B\| = \sqrt{b-a}$.

Problema 2. Sean X e Y espacios normados y sea $f : X \to Y$ una función *positivamente homogénea*[1]. Demuestre que f tiene derivada direccional en el origen en todas las direcciones. Pruebe también que f es Gâteaux-diferenciable en el origien sólo si es lineal y continua.

Solución: Primero, dado que $f(0) = 0$, vemos que para todo $d \in X \setminus \{0\}$, se tiene que

$$f'(0;d) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(f(td) - f(0)) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(tf(d) - 0) = f(d).$$

[1]Esto quiere decir que $f(td) = tf(d)$ para todo $d \in X$ y todo $t > 0$.

La función f es Gâteaux-diferenciable en 0 si, y solo si, la función $d \mapsto f'(0;d)$ es lineal y continua. Esto es equivalente a que f sea lineal y continua.

Problema 3. Sean X e Y espacios normados, $A \subset X$ abierto y $f : X \to Y$. Decimos que f es *casi diferenciable* en $x \in A$ si existe una función lineal $L : X \to Y$ (no necesariamente continua) tal que

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Lh\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Pruebe que f es Fréchet-diferenciable en x si, y sólo si, es continua y casi diferenciable allí.

<u>Solución:</u> Si f es Fréchet-diferenciable en x, ella es continua (visto en clase) y casi diferenciable allí (trivial). Recíprocamente, veremos que si f es continua y casi diferenciable en x, entonces L debe ser continua en 0. En efecto,

$$0 \leq \|Lh\|_Y \leq \|f(x+h) - f(x) - Lh\|_Y + \|f(x+h) - f(x)\|_Y \to 0$$

cuando $\|h\|_X \to 0$.

Problema 4. Sea H un espacio con producto interno y sea (x_n) una sucesión en H. Decimos que x_n *converge débilmente* a x si $\lim\limits_{n\to\infty} \langle y, x_n - x\rangle = 0$ para cada $y \in H$. Demuestre que x_n converge a x (en el sentido usual) si, y sólo si, converge débilmente a x y $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$.

<u>Solución:</u> Si x_n converge a x (en el sentido usual), para cada $y \in X$ tenemos que

$$|\langle y, x_n - x\rangle| \leq \|y\| \, \|x_n - x\| \to 0$$

cuando $n \to \infty$ y x_n converge débilmente a x. Además, $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ por continuidad de la norma. Recíprocamente, vemos primero que

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle + \|x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\langle x_n - x, x\rangle - \|x\|^2.$$

Si x_n converge débilmente a x y $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$, entonces $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 \leq 0$, y x_n converge a x en el sentido usual.

Tiempo: 3h00