Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2017/01
MAT225

PAUTA CERTAMEN I

Resuelva cada problema justificando adecuadamente

En todo lo que sigue, (X, d) es un espacio métrico, $L > 0$ y $f : X \to X$ sastiface

$$d(f(x), f(y)) \geq Ld(x, y)$$

para cada $x, y \in X$.

Problema 1. Pruebe que para cada subconjunto cerrado $C \subset X$, $f(C)$ es cerrado en $f(X)$.

Solución: Claramente, f es inyectiva, pues $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Luego, es una biyección entre X y $f(X)$. La función inversa es (Lipschitz-)continua pues

$$d(u, v) = d\big(f(f^{-1}(u)), f(f^{-1}(v)\big) \geq Ld(f^{-1}(u), f^{-1}(v)).$$

Luego, dado $C \subset X$ cerrado, su preimagen por f^{-1}, $(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$, es cerrada en $f(X)$.

Problema 2. Demuestre que si f es continua, para cada subconjunto completo $C \subset X$, $f(C)$ es completo.

Solución: Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $f(C)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in C$ tal que $y_n = f(x_n)$. Luego

$$d(y_n, y_m) = d(f(x_n), f(x_m)) \geq Ld(x_n, x_m)$$

para cada $n, m \in \mathbb{N}$. Esto dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en C. Como C es completo, existe $\bar{x} := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, y es un elemento de C. Dado que f es continua, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x}) \in f(C)$.

Problema 3. Suponga que X es completo, que $L > 1$ y que f es sobreyectiva. Compruebe que f tiene un único punto fijo.

Solución: La función f es biyectiva y su inversa es una contracción estricta pues $1/L < 1$. Como X es completo, el Teorema del Punto Fijo de Banach nos dice que f^{-1} tiene un único punto fijo y. Luego, $x := f^{-1}(y)$ es un punto fijo de f pues $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y =$

$f^{-1}(y) = x$. Para la unicidad, si x_1 y x_2 son puntos fijos de f, entonces

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \geq Ld(x_1, x_2),$$

lo cual es una contradicción si $x_1 \neq x_2$.

Problema 4. Asuma ahora que X es compacto y que $L = 1$. Dado $x_0 \in X$, defina recursivamente la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ mediante $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$. Compruebe que (x_n) tiene una subsucesión que converge a x_0.

Solución: Como X es compacto, la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ tiene una subsucesión convergente, que denotamos por $(x_{k_n^1})_{n\geq 0}$. De ella podemos extraer una nueva subsucesión $(x_{k_n^2})_{n\geq 1}$ tal que

$$d(x_{k_n^2}, x_{k_m^2}) \leq 1/n$$

para todo $m \geq n \geq 1$. En efecto, escogemos k_1^2 como el primer k_i^1 tal que $d(x_{k_i^1}, x_{k_p^1}) \leq 1$ para todo $p \geq i$. Esto lo podemos hacer pues $(x_{k_n^1})_{n\geq 0}$ es de Cauchy. Así sucesivamente vamos construyendo $(x_{k_n^2})_{n\geq 1}$. Eliminando, si es necesario, algunos términos para que la diferencia entre dos índices consecutivos sea suficientemente grande, extraemos una nueva subsucesión $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ tal que $j_n := k_{n+1} - k_n \geq n$. Así, tenemos que

$$Ld(x_0, x_{j_n}) \leq d(x_{k_n}, x_{k_n+j_n}) = d(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) \leq 1/n,$$

de donde $\lim\limits_{n\to\infty} x_{j_n} = x_0$.

Problema 5. Finalmente, suponga que X es compacto y que $L = 1$. Demuestre que si f es continua, es sobreyectiva.

Solución: Usando el problema anterior, dado cualquier $x_0 \in X$, existe una sucesión en $f(X)$ que converge a x_0, con lo cual $f(X)$ es denso en X. Como f es continua y X es compacto, $f(X)$ también es compacto y, por lo tanto, cerrado. Concluimos que $X = \overline{f(X)} = f(X)$.