Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2016/01
MAT225

TAREA III

Resuelva cada problema justificando adecuadamente

Problema 1. Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es *secuencialmente continua en* $x \in X$ si para cada sucesión (x_n) en X que converja a x, la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(x)$. Diga si esta condición es equivalente a la continuidad de f en x.

Problema 2. Un *sistema dirigido* es un conjunto Δ con una relación transitiva $\prec$ tal que para cada $\alpha, \beta \in \Delta$ existe $\gamma \in \Delta$ tal que $\alpha \prec \gamma$ y $\beta \prec \gamma$. Una *red* es una función ϕ de un sistema dirigido $(\Delta, \prec)$ en un espacio topológico (X, τ). Un punto $x \in X$ es el *límite* de la red ϕ si para cada $A \in \mathcal{A}(x)$ existe $\delta_0 \in \Delta$ tal que $\phi(\delta) \in A$ para todo $\delta \succ \delta_0$. Por otra parte, x es *punto de acumulación* de ϕ si para cada $A \in \mathcal{A}(x)$ y cada $\delta_0 \in \Delta$ existe $\delta \succ \delta_0$ tal que $\phi(\delta) \in A$. Demuestre lo siguiente:

(1) Compruebe que una sucesión es una red. Dé un ejemplo de una red que no sea una sucesión.
(2) Demuestre que $x \in \overline{E}$ si, y solo si, existe una red en E cuyo límite es x.
(3) Verifique que (X, τ) es de Hausdorff si, y solo si, cada red tiene, a lo más, un límite.
(4) Pruebe que $f : X \to Y$ es continua en $x \in X$ si, y solo si, para cada red ϕ cuyo límite sea x, la red $f \circ \phi$ tiene por límite $f(x)$.

Problema 3. Pruebe que cada componente conexa de un espacio localmente conexo es abierta.

Problema 4. Defina una topología en $\mathbb{R}$ de manera que sea compacto, satisfaga el primer axioma de separación pero no sea de Hausdorff.

Problema 5. Demuestre que si $(A_n)n \in \mathbb{N}$ es una sucesión de abiertos densos en un espacio localmente compacto (X, τ), entonces $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ también es densa.

Problema 6. Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff compacto. Pruebe que si $C \subset X$ es cerrado, entonces X/C es homeomorfo a la compactificación de Alexandroff de $X \setminus C$.