

TAREA II

RESUELVA CADA PROBLEMA JUSTIFICANDO ADECUADAMENTE

Problema 1. Sean X e Y espacios de Banach. El *Teorema de la Aplicación Abierta* dice que si $A \in \mathcal{L}(X; Y)$ es sobreyectivo, entonces $A(U)$ es abierto para cada abierto $U \subset X$. Usando esto, pruebe lo siguiente:

- (1) Un operador $A \in \mathcal{L}(X; Y)$ es invertible si, y solo si, es biyectivo.
- (2) Sea Z un espacio vectorial y sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas en Z tales que $\|z\|_1 \leq \|z\|_2$ para todo $z \in Z$ y que los espacios $(Z, \|\cdot\|_1)$ y $(Z, \|\cdot\|_2)$ son de Banach. Entonces existe $c > 0$ tal que $\|z\|_1 \geq c\|z\|_2$.

Problema 2. Sea X un espacio normado y sea $A \in \mathcal{L}(X; X)$. El espectro de A es el conjunto $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : A - \lambda I \text{ no es invertible}\}$.

- (1) Demuestre que $\sigma(A)$ es cerrado y que $|\lambda| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X; X)}$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$.
- (2) Si $X = \mathbb{R}^N$, ¿qué es $\sigma(A)$?
- (3) Suponga que $X = \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ y $Ax = \mu_0 x$ para alguna $\mu_0 \in X$ fija. Calcule $\sigma(A)$.
- (4) ¿Cómo se comparan los resultados de (2) y (3)?

Problema 3. Sea H un espacio de Hilbert separable y sea \mathcal{Z} un subconjunto ortonormal de H ($\|z\| = 1$ para todo $z \in \mathcal{Z}$ y $\langle z, z' \rangle = 0$ para cada $z, z' \in \mathcal{Z}$).

- (1) Demuestre que \mathcal{Z} es numerable. En otras palabras, $\mathcal{Z} = \{z_i\}_{i \in \mathcal{I} \subset \mathbb{N}}$.
- (2) Dados $x \in H$ e $i \in \mathcal{I}$, defina el i -ésimo coeficiente de Fourier de x como $c_i(x) = \langle x, z_i \rangle$. Compruebe que $(c_i(x))_{i \in \mathcal{I}} \in \ell^2(\mathcal{I})$. Más precisamente, $\sum_{i \in \mathcal{I}} c_i(x)^2 \leq \|x\|^2$.
- (3) Suponga que $\mathcal{Z}^\perp = \{0\}$. Pruebe que para cada $x \in H$ se tiene
 - (a) La identidad de Bessel: $\sum_{i \in \mathcal{I}} c_i(x)^2 = \|x\|^2$.
 - (b) La descomposición en serie de Fourier: $x = \sum_{i \in \mathcal{I}} c_i(x) z_i$.

Problema 4. Consideramos el espacio $Y = \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R})$, con la norma $\|y\| = \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty$, y una función continua $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada $y \in Y$, definimos

$$J(y) = \int_a^b L(t, y(t), y'(t)) dt.$$

Pruebe que $J : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el sentido de Fréchet y calcule su derivada.