Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2016/01
MAT225

TAREA I

Resuelva cada problema justificando adecuadamente

Problema 1. Dé un ejemplo de un homeomorfismo entre un espacio métrico completo y uno incompleto.

Problema 2. Sean $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas con

$$|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| \leq M|z_1 - z_2|.$$

Pruebe que la ecuación

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, f(y))\, dy + \varphi(x)$$

tiene una única solución siempre que $M(b - a)|\lambda| < 1$.

Problema 3. Demuestre que

$$C = \{x \in \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R}) \ : \ \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty \leq 1\}$$

es un subconjunto precompacto de $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$. Pruebe también que no es compacto.

Problema 4. Considere el cuadrado $C = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ y sea A un abierto que contiene a C. Compruebe que existe otro abierto B tal que $C \subset B \subset \overline{B} \subset A$.

Problema 5. Sea $\big((X_n, d_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos. Considere el producto cartesiano $X = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} X_n$ y defina $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mediante

$$d(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n(1 + d_n(x_n, y_n))}.$$

(1) Compruebe que d es una métrica en X;
(2) Demuestre que si cada X_n es completo, también lo es X.
(3) Demuestre que si cada X_n es totalmente acotado, también lo es X.
(4) Demuestre que si cada X_n es compacto, también lo es X.