Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2016/01
MAT225

GUÍA DE EJERCICIOS III

Resuelva cada problema justificando adecuadamente

Problema 1. Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $E \subset X$. Demuestre que si se toman adherencias y complementos repetidas veces y en cualquier orden, se pueden obtener hasta catorce conjuntos distintos (incluyendo al propio E). Dé un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ donde se alcance esta cota.

Problema 2. Sea $X = [0,1]$ y digamos que $A \in \tau$ si $A = \emptyset$ o si $|A^c| \leq |\mathbb{N}|$. Pruebe que (X,τ) no satisface ninguno de los dos axiomas de numerabilidad, no es de Hausdorff, pero sísatisface el primer axioma de separación.

Problema 3. Tomemos un símbolo ω y definamos $X = (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \cup \{\omega\}$. Para cada sucesión $s = (s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$B_{s,n} = \{\omega\} \cup \{(j,k) : k \geq n \wedge j \geq s_k\}.$$

Demuestre que los conjuntos de la forma $B_{s,n}$, junto con los de la forma $\{(j,k)\}$, forman una base para una topología en X. Pruebe que $\omega \in \overline{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ pero no hay ninguna sucesión en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ que tenga a ω como punto de acumulación. Este espacio es separable pero no satisface ninguno de los axiomas de numerabilidad vistos en clase. ¿Tiene la propiedad de Lindelöf?

Problema 4. Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es *secuencialmente continua en* $x \in X$ si para cada sucesión (x_n) en X que converja a x, la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(x)$. Diga si esta condición es equivalente a la continuidad de f en x.

Problema 5. Sea X el conjunto formado por la unión de las circunferecias $(x-1/n)^2 + y^2 = 1/n^2$ con la topología de subespacio heredada de $\mathbb{R}^2$. Por otra parte, sea Y el espacio cuociente obtenido al identificar en $\mathbb{R}$ (es decir, $[x] = \{x\}$ si $x \notin \mathbb{Z}$ y $[x] = [0]$ si $x \in \mathbb{Z}$). Compruebe que X e Y no son homeomorfos.

Problema 6. Enuncie y demuestre el Lema de Urysohn y el Teorema de Extensión de Tietze.

Problema 7. Un *sistema dirigido* es un conjunto Δ con una relación transitiva $\prec$ tal que para cada $\alpha, \beta \in \Delta$ existe $\gamma \in \Delta$ tal que $\alpha \prec \gamma$ y $\beta \prec \gamma$. Una *red* es una función ϕ de un sistema dirigido $(\Delta, \prec)$ en un espacio topológico (X, τ). Un punto $x \in X$ es el *límite* de la red ϕ si para cada $A \in \mathcal{A}(x)$ existe $\delta_0 \in \Delta$ tal que $\phi(\delta) \in A$ para todo $\delta \succ \delta_0$. Por otra parte, x es *punto de acumulación* de ϕ si para cada $A \in \mathcal{A}(x)$ y cada $\delta_0 \in \Delta$ existe $\delta \succ \delta_0$ tal que $\phi(\delta) \in A$. Demuestre lo siguiente:

(1) Compruebe que una sucesión es una red. Dé un ejemplo de una red que no sea una sucesión.
(2) Demuestre que $x \in \overline{E}$ si, y solo si, existe una red en E cuyo límite es x.
(3) Verifique que (X, τ) es de Hausdorff si, y solo si, cada red tiene, a lo más, un límite.
(4) Pruebe que $f : X \to Y$ es continua en $x \in X$ si, y solo si, para cada red ϕ cuyo límite sea x, la red $f \circ \phi$ tiene por límite $f(x)$.

Problema 8. Pruebe que cada componente conexa de un espacio localmente conexo es abierta.

Problema 9. Defina una topología en $\mathbb{R}$ de manera que sea compacto, satisfaga el primer axioma de separación pero no sea de Hausdorff.

Problema 10. Pruebe que (X, τ) es localmente compacto si cada punto tiene una vecindad compacta.

Problema 11. Demuestre que si $(A_n)n \in \mathbb{N}$ es una sucesión de abiertos densos en un espacio localmente compacto (X, τ), entonces $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ también es densa.

Problema 12. Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff localmente compacto que no es compacto. Pruebe que la compactificación de Alexandroff produce un espacio de Hausdorff compacto (X^*, τ^*), y que la función identidad es un homeomorfismo entre X y un subconjunto denso de X^*.

Problema 13. Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff compacto. Pruebe que si $C \subset X$ es cerrado, entonces X/C es homeomorfo a la compactificación de Alexandroff de $X \setminus C$.