Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2016/01
MAT225

GUÍA DE EJERCICIOS II

Resuelva cada problema justificando adecuadamente

Problema 1. Pruebe que el cubo de Hilbert es un conjunto convexo y que su interior es vacío.

Problema 2. Enuncie y demuestre el Lema de Farkas.

Problema 3. Considere el espacio $\mathbb{R}^2$ dotado de la norma $\|\cdot\|_p$ con $p \in [1, \infty]$. En cada caso, determine:

(1) La norma dual $\|\cdot\|_*$; y
(2) El conjunto $\mathcal{J}(1,0)$ de los funcionales soporte del vector $(1,0)$.[1]

Problema 4. Sean X e Y espacios de Banach. El *Teorema de la Aplicación Abierta* dice que si $A \in \mathcal{L}(X;Y)$ es sobreyectivo, entonces $A(U)$ es abierto para cada abierto $U \subset X$. Usando esto, pruebe lo siguiente:

(1) Un operador $A \in \mathcal{L}(X;Y)$ es invertible si, y solo si, es biyectivo.
(2) Sea Z un espacio vectorial y sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas en Z tales que $\|z\|_1 \leq \|z\|_2$ para todo $z \in Z$ y que los espacios $(Z, \|\cdot\|_1)$ y $(Z, \|\cdot\|_2)$ son de Banach. Entonces existe $c > 0$ tal que $\|z\|_1 \geq c\|z\|_2$.

Problema 5. Sea X un espacio de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X;X)$. El espectro de A es el conjunto $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : A - \lambda I \text{ no es invertible}\}$.

(1) Demuestre que $\sigma(A)$ es cerrado y que $|\lambda| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X;X)}$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$.
(2) Si $X = \mathbb{R}^N$, ¿qué es $\sigma(A)$?
(3) Suponga que $X = \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ y $Ax = \mu_0 x$ para alguna $\mu_0 \in X$ fija. Calcule $\sigma(A)$.
(4) ¿Cómo se comparan los resultados de (2) y (3)?

[1]Recuerde que $\mathcal{J}(x) = \{x^* \in X^* : \|x^*\|_* = \|x\| \text{ y } \langle x^*, x\rangle_{X^*,X} = \|x\|^2\}$.

Problema 6. Sea H un espacio de Hilbert y sea $L \in H^*$. Demuestre que existe $y \in H$ tal que $\|y\| = \|L\|_*$ y $\langle L, x\rangle_{H^*,H} = \langle y, x\rangle$ para todo $x \in H$.

Problema 7. Sea H un espacio de Hilbert separable y sea $\mathcal{Z}$ un subconjunto ortonormal de H ($\|z\| = 1$ para todo $z \in \mathcal{Z}$ y $\langle z, z'\rangle = 0$ para cada $z, z' \in \mathcal{Z}$).

(1) Demuestre que $\mathcal{Z}$ es numerable. En otras palabras, $\mathcal{Z} = \{z_i\}_{i\in\mathcal{I}\subset\mathbb{N}}$.

(2) Dados $x \in H$ e $i \in \mathcal{I}$, defina el i-ésimo coeficiente de Fourier de x como $c_i(x) = \langle x, z_i\rangle$. Compruebe que $\big(c_i(x)\big)_{i\in\mathcal{I}} \in \ell^2(\mathcal{I})$. Más precisamente, $\sum_{i\in\mathcal{I}} c_i(x)^2 \le \|x\|^2$.

(3) Suponga que $\mathcal{Z}^\perp = \{0\}$. Pruebe que para cada $x \in H$ se tiene

   (a) La identidad de Bessel: $\sum_{i\in\mathcal{I}} c_i(x)^2 = \|x\|^2$.

   (b) La descomposicón en serie de Fourier: $x = \sum_{i\in\mathcal{I}} c_i(x) z_i$.

Problema 8. Consideramos el espacio $Y = \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R})$, con la norma $\|y\| = \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty$, y una función continuamente diferenciable $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Para cada $y \in Y$, definimos

$$J(y) = \int_a^b L(t, y(t), y'(t))\, dt.$$

Pruebe que $J : Y \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el sentido de Fréchet y calcule su derivada.

Problema 9. Sean X, Y y Z espacios normados y sea $B : X\times Y \to Z$ una función bilineal (lineal en cada componente) y continua (existe $\beta \ge 0$ tal que $\|B(x, y)\|_Z \le \beta\|x\|_X \|y\|_Y$ para todo $(x, y) \in X \times Y$). Compruebe que B es diferenciable en el sentido de Fréchet y calcule su derivada.

Problema 10. Sea A un abierto conexo de un espacio de Banach X.

(1) Pruebe que para cada par de puntos de A existe una línea quebrada que los une.

(2) Suponga que Y es otro espacio de Banach y que $f : A \to Y$ es una función diferenciable tal que $Df(x) = 0$ para todo $x \in A$. Demuestre que f es constante.