Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2016/01
MAT225

GUÍA DE EJERCICIOS I

Resuelva cada problema justificando adecuadamente

Problema 1. Pruebe que $\ell^p(\mathbb{N})$ es un espacio métrico completo y separable para cada $p \in (1, \infty)$.

Problema 2. Pruebe que la función $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$$

es una métrica en $\mathbb{R}$. Es $(\mathbb{R}, d)$ completo?

Problema 3. Dé un ejemplo de un homeomorfismo entre un espacio métrico completo y uno incompleto.

Problema 4. Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre que d es continua en $X \times X$.

Problema 5. Sean $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas con

$$|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| \leq M|z_1 - z_2|.$$

Pruebe que la ecuación

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, f(y))\, dy + \varphi(x)$$

tiene una única solución siempre que $M(b - a)|\lambda| < 1$.

Problema 6. Pruebe que un subespacio de un espacio métrico separable es separable.

Problema 7. Pruebe que todo espacio métrico totalmente acotado es separable.

Problema 8. Demuestre que

$$C = \{x \in \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R}) \ : \ \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty \leq 1\}$$

es un subconjunto precompacto de $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$. Pruebe también que no es compacto.

Problema 9. Sean (X,d) y (Y,δ) espacios métricos y sea $f : A \subset X \to Y$ una función uniformemente continua. Compruebe que f tiene una única extensión continua a $\overline{A}$ y que dicha extensión es uniformemente continua.

Problema 10. Sean (X,d) y (Y,δ) espacios métricos y sea $f : A \subset X \to Y$ una función continua. Demuestre que si X es compacto, f es uniformemente continua.

Problema 11. Considere el cuadrado $C = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ y sea A un abierto que contiene a C. Compruebe que existe otro abierto B tal que $C \subset B \subset \overline{B} \subset A$.

Problema 12. Sean (X,d) y (Y,δ) espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función uniformemente continua y sobreyectiva. Pruebe que si X es totalmente acotado, entonces Y también lo es.

Problema 13. En el espacio $X = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$, para cada $n \geq 1$, considere el conjunto

$$F_n = \left\{ f \in X : \ \exists x_0 \in [0, 1 - \tfrac{1}{n}] \text{ tal que } |f(x) - f(x_0)| \leq n(x - x_0) \text{ para todo } x \in [x_0, 1) \right\}.$$

Demuestre que F_n es cerrado y de interior vacío. Concluya que el conjunto de las funciones continuas que no son diferenciables en ningún punto es de segunda categoría.

Problema 14. Sea $\big((X_n, d_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos. Considere el producto cartesiano $X = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} X_n$ y defina $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mediante

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n(1 + d_n(x_n, y_n))}.$$

(1) Compruebe que d es una métrica en X;
(2) Demuestre que si cada X_n es completo, también lo es X.
(3) Demuestre que si cada X_n es totalmente acotado, también lo es X.
(4) Demuestre que si cada X_n es compacto, también lo es X.