Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2016/01
MAT225

CERTAMEN III

Resuelva cada problema justificando adecuadamente

Problema 1. Sean (X,τ), (Y,σ) espacios topológicos y sea $f : X \to Y$. El gráfico de f es

$$G(f) = \{\, (x,y) \in X \times Y \,:\, y = f(x) \,\}.$$

(1) Demuestre que si (Y,σ) es de Hausdorff y f es continua, entonces $G(f)$ es cerrado.
(2) Pruebe que el resultado deja de ser válido si se elimina la condición de Hausdorff.
(3) Si f tiene gráfico cerrado, ¿es continua?

Problema 2. Sea (X,τ) un espacio de Hausdorff. Pruebe que son equivalentes:

i) Para cada $C \subset X$ cerrado y cada $x \notin C$ existen abiertos disjuntos $U, V \subset X$ tales que $x \in U$ y $C \subset V$.
ii) Para cada $x \in X$ y cada $A \in \mathcal{A}(x)$ existe $B \in \mathcal{A}(x)$ tal que $\overline{B} \subset A$.

Problema 3. Sean A un conjunto y (X,τ) un espacio topológico. Considere el conjunto $\mathcal{F}(A;X)$ de todas las funciones de A en X. Identifique $\mathcal{F}(A;X)$ con el producto cartesiano $X^A = \prod_{a\in A} X$ de la manera usual.[1] La topología producto en X^A define una topología $\mathcal{T}$ en $\mathcal{F}(A;X)$.

(1) ¿Cómo son los abiertos básicos de X^A?
(2) Sea (f_n) una sucesión en $\mathcal{F}(A;X)$ y sea $f \in \mathcal{F}(A;X)$. Demuestre que $\mathcal{T} - \lim_{n\to\infty} f_n = f$ si, y sólo si, $\tau - \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$ para cada $a \in A$.[2]
(3) ¿Bajo qué hipótesis sobre (X,τ) puede garantizar que $(\mathcal{F}(A;X), \mathcal{T})$ es compacto?
(4) ¿Bajo qué condiciones sobre (X,τ) puede garantizar que toda sucesión en $\mathcal{F}(\mathbb{N};X)$ tiene una subsucesión que converge puntualmente?[3]

Tiempo: 3h00

[1] Considere la biyección $\Phi : \mathcal{F}(A;X) \to X^A$, definida por $\Phi(f) = \prod_{a\in A} \big(f(a)\big)$.
[2] Por eso $\mathcal{T}$ se conoce como la *topología de la convergencia puntual*.
[3] Recuerde que $\mathbb{N}$ tiene una cantidad numerable de subconjuntos *finitos*.