Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2016/01
MAT225

CERTAMEN II

Resuelva cada problema justificando adecuadamente

Problema 1. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach y sea $T : X \to Y$ un operador lineal. La función $|\!|\!|\cdot|\!|\!| : X \to \mathbb{R}$, definida por $|\!|\!|x|\!|\!| = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$, es una norma en X y $\|x\|_X \leq |\!|\!|x|\!|\!|$ para todo $x \in X$. Suponga que $G(T) = \{(x, y) \in X \times Y : y = Tx\}$ (el gráfico de T) es cerrado.

(1) Demuestre que el espacio $(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ es de Banach.
(2) Deduzca que existe $C > 0$ tal que $|\!|\!|x|\!|\!| \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in X$.[1]
(3) Concluya que $T \in \mathcal{L}(X; Y)$.

Problema 2. Sea H un espacio de Hilbert y sea $L \in H^*$. Denote $K = \mathrm{Ker}(L)$ y

$$K^\perp = \{y \in H : \langle y, k\rangle = 0 \text{ para todo } k \in K\}.$$

(1) Verifique que $L(x)h - L(h)x \in K$ para cada $x, h \in H$.
(2) Demuestre que $x - \mathrm{Proy}_K(x) \in K^\perp$ para cada $x \in H$.
(3) Pruebe que si $0 \neq y \in K^\perp$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\langle \alpha y, h\rangle = L(h)$ para todo $h \in H$.
(4) Concluya que existe un único $\hat{y} \in H$ tal que $\|\hat{y}\| = \|L\|_*$ y $\langle \hat{y}, h\rangle = L(h)$ para todo $h \in H$.

Problema 3. Considere el espacio $X = \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})$ con la norma $\|u\|_X = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $h \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$. Defina $A : X \to \mathbb{R}$ y $B : X \times X \to R$ como

$$A(u) = \int_0^1 h(t)u(t)\, dt \quad \text{y} \quad B(u, v) = \int_0^1 \left[u'(t)v'(t) + \lambda u(t)v(t)\right] dt$$

(1) Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X; \mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{L}_2(X, X; \mathbb{R})$.
(2) Defina $J : X \to \mathbb{R}$ mediante $J(u) = A(u) + \frac{1}{2}B(u, u)$. Calcule $DJ(u)v$ para $u, v \in X$.
(3) Defina $X_0 = \{u \in X : u(0) = u(1) = 0\}$. Suponga que $\hat{u} \in X_0 \cap \mathcal{C}^2([0, 1]; \mathbb{R})$ satisface $J(\hat{u}) \leq J(u)$ para toda $u \in X_0$. Demuestre[2] que u es solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} u''(t) - \lambda u(t) = h(t) \text{ para todo } t \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Tiempo: 3h00

[1] Se sugiere usar el Teorema de la Aplicación Abierta.
[2] Le puede ser útil lo siguiente: si g es continua y $\int_0^1 g(t)v(t)dt = 0$ para toda $v \in X_0$, entonces $g = 0$.