Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2016/01
MAT225

CERTAMEN I

Resuelva cada problema justificando adecuadamente

Problema 1. Un espacio métrico es *conexo* si no puede representarse como la unión de dos abiertos no vacíos y disjuntos.

(1) Sean (X, d) e (Y, δ) espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Demuestre que si X es conexo, también lo es $f(X)$.
(2) Pruebe que un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo si, y sólo si, es un intervalo.
(3) Deduzca el Teorema del Valor Intermedio.

Problema 2. Sea (X, d) un espacio métrico.

(1) Pruebe que para cada $C \subset X$, la función $x \mapsto d(x, C)$ es continua.
(2) Demuestre que C es cerrado si, y sólo si, $d(x, C) > 0$ para todo $x \notin C$.
(3) Sean $C_1, C_2 \subset X$ dos conjuntos cerrados, no vacíos y disjuntos. Construya una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$ para todo $x \in C_1$ y $f(x) = 0$ para todo $x \in C_2$.
(4) Deduzca que existen abiertos disjuntos $A_1, A_2 \subset X$ tales que $C_1 \subset A_1$ y $C_2 \subset A_2$.

Problema 3. Sean (X, d) e (Y, δ) espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva. Demuestre que si X es compacto, entonces f^{-1} es continua.

Problema 4. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \to \mathbb{R}$. Suponga que el conjunto

$$\operatorname{epi}(f) := \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}$$

es cerrado y que, para cada $\gamma \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$[f \leq \gamma] := \{x \in X : f(x) \leq \gamma\}$$

es precompacto. Demuestre que f alcanza su mínimo en X.

Tiempo: 3h00